Calcul intégral et convolution

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\varphi_n(t) = \dfrac{3n}{4}(1 - n^2t^2)$ si $|t| \leqslant \dfrac{1}{n}$, et $\varphi_n(t) = 0$ si $|t| > \dfrac{1}{n}$.

Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t) f(x+t)\,\mathrm{d}t$

1. Tracer l'allure du graphe d'une fonction φ_n.
   L'application φ_n est-elle continue, dérivable ? Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$

2. (a) Montrer que $f_n(x) = \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varphi_n(u - x) f(u)\,\mathrm{d}u$.
   Former une expression de $f_n(x)$ permettant d'affirmer que f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout x réel, montrer que $f_n'(x) = \dfrac{3n^3}{2} \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (u - x) f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{3n^3}{2} \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t f(x+t)\,\mathrm{d}t$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$ et $M_n(x) = \max\limits_{u \in I_n(x)} |f(u) - f(x)|$.
   (a) Pour tout réel x, montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n(x)$
   (b) Soit J un segment, et $K_n(J) = \max\limits_{x \in J} |f_n(x) - f(x)|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(J) = 0$.
   (c) Que peut-on en déduire relativement à la suite des fonctions f_n ?

4. On suppose que f est dérivable en un point x de $\mathbb{R}$.
   On définit l'application $t \mapsto R_x(t)$ par l'égalité $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tR_x(t)$.
   (a) Pour tout n naturel non nul, montrer que $f_n'(x) = f'(x) + \dfrac{3n^3}{2} \displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 R_x(t)\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.