Une étude de suite récurrente

On pourra admettre le résultat suivant (égalité des accroissements finis) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

Soient x et y deux éléments de l'intervalle I, avec $x < y$.

Alors il existe un réel c dans $]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$.

Soit λ un nombre réel strictement positif.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{8} - x^3\right)$.

Soit a un réel. On définit une suite u par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Si la suite u est convergente dans $\mathbb{R}$, quelle est sa seule limite possible ?

   (b) Montrer que pout tout x de $\mathbb{R}$: $x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \geqslant x$ et $x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leqslant x$.

2. Dans les questions $2, 3, 4$, on suppose $0 < \lambda \leqslant \frac{4}{7}$, et $0 \leqslant a \leqslant 1$.

   (a) Montrer que $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ et que $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant f(x)$.

   (b) Préciser la monotonie et la limite de la suite u, suivant les valeurs de a.

3. (a) Montrer que si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ alors a $0 \leqslant f(x) - \frac{1}{2} \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right) f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

   (b) En déduire que si $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)^n$.

4. (a) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ alors a $0 \leqslant \frac{1}{2} - f(x) \leqslant \left(\frac{1}{2} - x\right) f'(x)$.

   (b) En déduire que si $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{1}{2} - u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{64}\lambda^3\right)^{n-1}$.

5. Dans cette question, on suppose que $\frac{4}{7} < \lambda \leqslant \frac{8}{7}$, et toujours $0 \leqslant a \leqslant 1$.

   (a) Effectuer une étude soignée des variations de l'application f sur $[0, 1]$.

   On précisera notamment les réels β, γ tels que $\frac{1}{2} < \beta < \gamma,\ f'(\beta) = 0$ et $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que tous les termes u_n de la suite u appartiennent au segment $[0, 1]$.

   (c) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$. On précisera en particulier si la suite u est monotone, éventuellement à partir d'un certain rang.

6. Dans cette question, on suppose que $\frac{8}{7} < \lambda < \frac{4}{3}$, et toujours $0 \leqslant a \leqslant 1$.

   On pourra réutiliser les calculs de la question (5), et notamment les notations β et γ.

   (a) Étudier les variations de f sur le segment $\left[-\frac{1}{6}, 1\right]$.

   On notera δ (sans chercher à le calculer) le réel de $]\gamma, 1[$ tel que $f(\delta) = 0$.

   (b) Étudier la suite u suivant les valeurs de $u_0 = a$.

7. En supposant toujours $0 \leqslant a \leqslant 1$, étudier la suite u quand $\lambda = \frac{4}{3}$.

   On illustrera graphiquement la convergence pour une valeur donnée de $u_0 = a$.