Étude asymptotique d'une suite

Le but du problème est de déterminer un équivalent de la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) = \binom{2n}{n}^{-\alpha} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^{\alpha},\ \text{où } \alpha > 0.$$

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\displaystyle v_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)$.

Dans tout le problème, r est un réel de $\Big]\dfrac{1}{2}, 1\Big[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\int_1^{n+1} \exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,\mathrm{d}x \leqslant v_n(\alpha) \leqslant \int_0^{n} \exp\Big(-\alpha\frac{x^2}{n}\Big)\,\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire $v_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n^r \leqslant k \leqslant n} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \leqslant n\exp(-\alpha\, n^{2r-1})$.

   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < n^r} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big) \underset{\infty}{\sim} v_n(\alpha)$

   On pose $p_n(1) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ si $n \geqslant 1$, et $p_n(k) = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}\Big(1-\frac{j}{n}\Big)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\Big(1+\frac{j}{n}\Big)}$ si $2 \leqslant k \leqslant n$.

3. (a) Montrer que $\displaystyle u_n(\alpha) = 1 + 2\binom{2n}{n}^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k}^{\alpha}$.

   (b) Établir que pour tout k de $\{1,\ldots,n\}$ on a $\dbinom{2n}{n+k} = \dbinom{2n}{n}p_n(k)$.

4. (a) Soit t dans $[0,1[$. Montrer que pour tout x de $[0,t]$ on a :

   (i) : $2x \leqslant \ln(1+x) - \ln(1-x) \leqslant \dfrac{2x}{1-t^2}$.

   (ii) : $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) En déduire que $p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big) \leqslant \exp\Big(\dfrac{k^2}{2n^2}\Big)$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n^r \leqslant k \leqslant n} p_n^{\alpha}(k)$ est négligeable devant $v_n(\alpha)$ quand $n \to \infty$.

5. (a) Montrer que $\displaystyle u_n(\alpha) - 2v_n(\alpha) = 2\sum_{1\leqslant k<n^r} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big(p_n^{\alpha}(k)\exp\Big(\alpha\frac{k^2}{n}\Big) - 1\Big) + \mathrm{o}(v_n(\alpha))$

   (b) Avec (4.a) montrer que $p_n(k)\exp\Big(\dfrac{k^2}{n}\Big) \geqslant \exp\Big(-\dfrac{n^{4r-3}}{1-n^{2r-2}}\Big)$ si $1 \leqslant k < n^r$.

   (c) En déduire : $\displaystyle 2\sum_{1\leqslant k<n^r} \exp\Big(-\alpha\frac{k^2}{n}\Big)\Big(p_n^{\alpha}(k)\exp\Big(\alpha\frac{k^2}{n}\Big) - 1\Big) = \mathrm{o}(v_n)$ si $r < \dfrac{3}{4}$.

   (d) Montrer finalement que $u_n(\alpha) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{n\pi}{\alpha}}$.

   (e) Cas particulier : donner un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$ quand $n \to \infty$.