

## Équations différentielles : quatre exercices indépendants

### I. Une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle  $(E) : x(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = x$ .

On en cherche les solutions  $x \mapsto y(x)$  définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

On note  $(H) : x(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = 0$  l'équation homogène associée à  $(E)$ .

1. Préciser la nature de  $(E)$ , ainsi que le ou les intervalles  $I$  sur lesquels on va la résoudre.
2. Donner la solution générale de  $(H)$  sur l'intervalle de résolution  $I$ .
3. Donner la solution générale de  $(E)$  sur l'intervalle de résolution  $I$ .
4. Déterminer les solutions de  $(E)$ , s'il en existe, sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .
5. Déterminer les solutions de  $(E)$ , s'il en existe, sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$ .
6. Déterminer les solutions de  $(E)$ , s'il en existe, sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
7. L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur  $\mathbb{R}$  ?

### II. Une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle  $(E_a) : y''(x) - (a + 1)y'(x) + ay(x) = d(x)$ , où  $a \in \mathbb{R}$ , et où  $x \mapsto d(x)$  est une application continue sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

On en cherche les solutions  $x \mapsto y(x)$  définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

On note  $(H_a) : y''(x) - (a + 1)y'(x) + ay(x) = 0$  l'équation homogène associée à  $(E_a)$ .

1. Préciser la nature de  $(E_a)$ , ainsi que le ou les intervalles  $I$  sur lesquels on va la résoudre.  
Indiquer brièvement la forme que prend la solution générale de  $(E_a)$  sur  $I$  (notamment en fonction de la solution générale de  $(H_a)$  sur  $I$ ).
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée  $(H_a)$  sur  $I$ .  
Dans cette question (comme dans la suivante) on discutera suivant les valeurs de  $a$ .
3. Dans cette question, on pose  $d(x) = xe^{a^2x}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
Donner la solution générale de  $(E_a)$  sur  $I$ .
4. Dans cette question, on suppose  $a = -1$  et on pose  $d(x) = \text{th } x$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .  
Donner la solution générale de  $(E_a)$  sur  $I$ .
5. On considère l'équation différentielle  $(E') : t^2 z''(t) + tz'(t) - z(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$  où  $z$  est une fonction inconnue à valeurs réelles, définie sur un intervalle  $J$ .

On cherche à résoudre  $(E)$  sur  $J = \mathbb{R}^{-*}$  ou sur  $J = \mathbb{R}^{+*}$ .

On pose le changement de variable  $t = \varepsilon e^x$ , où  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$  et  $\begin{cases} \varepsilon = -1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{-*} \\ \varepsilon = 1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$

On définit ainsi une application  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $y(x) = z(t)$ .

- (a) Montrer que l'application  $t \mapsto z(t)$  satisfait à  $(E')$  sur  $J$  si et seulement si l'application  $x \mapsto y(x)$  satisfait sur  $\mathbb{R}$  à l'équation étudiée à la question précédente.
- (b) En déduire l'expression de la solution générale de  $(E')$  sur  $J$ .
- (c) L'équation  $(E')$  possède-t-elle des solutions sur  $\mathbb{R}$  tout entier ?

On admettra que  $\varphi : t \mapsto \frac{\arctan t}{t}$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\varphi'(0) = 0$ .

### III. Une équation fonctionnelle

On dira qu'une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est solution du problème  $\mathcal{P}$  si :

- L'application  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tous  $x, y$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$  (E)

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les solutions du problème  $\mathcal{P}$ .

1. Déterminer les applications constantes qui sont solution du problème  $\mathcal{P}$ .
2. Dans cette question, soit  $f$  une solution *non constante* de  $\mathcal{P}$ . On pose  $a = f''(0)$ .
  - (a) Montrer que  $f(0) = 1$ .
  - (b) Montrer que  $f'(0) = 0$ .
  - (c) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $f''(x) = af(x)$ .  
Indication : dériver (E) par rapport à  $x$  ( $y$  fixé) et par rapport à  $y$  ( $x$  fixé).
3. Dédurre de ce qui précède toutes les solutions du problème  $\mathcal{P}$ .

### IV. Une équation différentielle avec “conditions initiales”

Soit  $x \mapsto a(x)$  une application définie et continue sur  $[0, 1]$ , à valeurs réelles.

On dit qu'une application  $x \mapsto y(x)$  est solution du problème  $\mathcal{P}$  si :

- L'application  $x \mapsto y(x)$  est deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - Elle est solution de l'équation différentielle  $y''(x) + a(x)y(x) = 0$  sur  $[0, 1]$ .
  - Elle satisfait aux conditions  $y(0) = y(1) = 0$ .
1. Dans le cas où l'application  $x \mapsto a(x)$  est constante ( $a(x) = \lambda$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ) montrer que la seule solution du problème  $\mathcal{P}$  est l'application nulle, sauf pour certaines valeurs de la constante  $\lambda$ , que l'on précisera.
  2. Si  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue, on définit l'application  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par :
 
$$\forall x \in [0, 1], \Phi(x) = (1-x) \int_0^x t \varphi(t) dt - x \int_1^x (1-t) \varphi(t) dt.$$
    - (a) Montrer que  $\Phi$  est deux fois dérivable sur  $[0, 1]$  et que (S)  $\begin{cases} \forall x \in [0, 1], \Phi''(x) = -\varphi(x) \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0 \end{cases}$
    - (b) Réciproquement, soit  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ .  
Montrer que si  $\psi$  est solution du système (S), alors  $\psi(x) = \Phi(x)$  sur  $[0, 1]$ .
  3. En déduire que l'application  $x \mapsto y(x)$  est solution du problème  $\mathcal{P}$  si et seulement si :
 
$$(E) : \quad \forall x \in [0, 1], y(x) = (1-x) \int_0^x t a(t) y(t) dt - x \int_1^x (1-t) a(t) y(t) dt.$$
  4. Soit  $x \mapsto y(x)$  une application continue sur  $[0, 1]$ .  
On pose  $m = \max_{[0,1]} |a(x)|$  et  $M = \max_{[0,1]} |y(x)|$ .  
Montrer que si  $x \mapsto y(x)$  vérifie (E) alors  $|y(x)| \leq \frac{1}{8} m M$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ .
  5. En déduire que si  $m < 18$  alors la seule solution du problème  $\mathcal{P}$  est l'application nulle.