Développements limités et études de fonctions.

On définit la fonction f sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$.

Première partie

1. Déterminer le DL de f en 0 à l'ordre de 4, et en π à l'ordre 2.
2. Sur l'intervalle $[0,\pi]$, étudier le signe de $f(x)-\sin x$ puis celui de $f(x)-x$.
   Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)=x$?
3. Étudier f et tracer sa courbe représentative. Montrer que $f([0,\frac{1}{2}]) \subset [0,\frac{1}{2}]$.
4. Pour tout x de $]0,\pi[$, on pose $r(x) = \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{x}$ et $s(x) = \dfrac{1}{f^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$.
   Donner un équivalent de $r(x)$ et de $s(x)$ au voisinage de 0.

Seconde partie

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = u \in [0,\pi]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et préciser sa limite.
   On suppose maintenant que le terme initial u est distinct de 0 et de π.
2. Étant donné une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$, on pose $w_n = \dfrac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
   Montrer que si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}\right)$ et en déduire un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.
4. On pose $f_n = f \circ f \circ \cdots f$ (n fois, avec $n \geqslant 1$.) Ainsi $u_n = f_n(u)$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Comparer $f_n(x)$ et $f_{n-1}(\frac{1}{2})$, pour $n > 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$, avec $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Troisième partie

On définit l'application g par $g(x) = \arccos \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$.

1. Vérifier que g est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\sin g(x)$ et $\cos g(x)$.
2. Étudier les variations de g sur $[0,\pi]$ et tracer la courbe. Préciser la concavité.
3. Montrer que g est une involution du segment $[0,\pi]$.
4. Soit x un élément de $[0,\frac{\pi}{3}]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique z de $[\frac{\pi}{3},\pi]$ tel que $f(z)=f(x)$.
   Déterminer une relation entre $\cos x$ et $\cos z$. Prouver que $z = g(x)$.
   (b) Calculer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ en fonction de x.
   (c) Calculer aussi $\cos\frac{x+z}{2}$ et $\cos\frac{x-z}{2}$ (poser $h(x) = x+g(x)$ et $k(x) = x-g(x)$.)
5. On sait que f est une bijection de $[0,\frac{\pi}{3}]$ sur $[0,\frac{1}{2}]$.
   Déterminer une expression de sa bijection réciproque.