Exercices de bon niveau sur les complexes

Exercice 1

Quel est la valeur maximum de $|z^3 - z + 2|$ pour $|z| = 1$, et quand ce maximum est-il atteint ?

Exercice 2

On note $U_n = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, avec $\omega_k = \exp \frac{2ik\pi}{n}$.

1. Pour $0 \leqslant q < n$, montrer que $\displaystyle\prod_{\substack{p=0 \\ p\neq q}}^{n-1} (\omega_q - \omega_p) = \frac{n}{\omega_q}$ (commencer par traiter le cas $q = 0$.)
2. En déduire $\displaystyle\prod_{p\neq q} (\omega_q - \omega_p)^2$ où le produit est étendu aux couples (p, q) vérifiant $\begin{cases} 0 \leqslant p < n \\ 0 \leqslant q < n \\ p \neq q \end{cases}$

   Calculer enfin le produit $\displaystyle\prod_{0\leqslant p<q\leqslant n} (\omega_q - \omega_p)^4$.

Exercice 3

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}\Big) = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{3^n}}$.

Exercice 4

On se donne a et b dans $\mathbb{C}$ et on pose $P(z) = z^2 + az + b$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

On suppose que pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, alors $|P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$.

Exercice 5

Soit Ω le centre d'un polygône régulier convexe de sommets $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Soit M un point de la demi-droite $[\Omega, A_1[$, extérieur au polygône. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} d(A_k, M) = d(\Omega, M)^n - d(\Omega, A_1)^n$.

Exercice 6

Pour quels couples (a, b) de réels les deux racines de $z^2 + 2az + b$ sont-elles de module $\leqslant 1$?