Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

Problème

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit la fonction polynomiale $R_{n,k} : x \mapsto \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

   (a) Simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} R_{n,k}(x)$.

   (b) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} kR_{n,k}(x) = nx$.

   (c) Prouver également l'égalité : $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)R_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$.

   (d) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 R_{n,k}(x) = nx(1-x)$.

2. Soit f une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $B_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big) R_{n,k}(x)$.

   On dit que les $B_n(f)$ sont les *polynômes de Bernstein* de f.

   Pour toute application continue φ sur $[0,1]$, on note $\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$.

   On va montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\| = 0$ (on exprime cette propriété en disant que la suite des polynômes $B_n(f)$ *converge uniformément* vers l'application f sur $[0,1]$).

   Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in [0,1]^2, |y-x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

   Remarque : on vous demande donc de *redémontrer* le théorème de Heine pour l'application f continue sur le segment $[0,1]$.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, $f(x) - B_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(f(x) - f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big) R_{n,k}(x)$.

   (c) Soit x un élément de $[0,1]$. On note $\mathcal{A} = \Big\{k \in \{0,\ldots,n\}, \Big|x - \dfrac{k}{n}\Big| \leqslant \alpha\Big\}$.

   Soit $\mathcal{B}$ le complémentaire de $\mathcal{A}$ dans $\{0,\ldots,n\}$.

      i. Montrer que $\sum\limits_{k\in\mathcal{A}} \Big| f(x) - f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big| R_{n,k}(x) \leqslant \varepsilon$.

      ii. Prouver $\alpha^2 \sum\limits_{k\in B} R_{n,k}(x) \leqslant \sum\limits_{k\in\mathcal{B}} \Big(x - \dfrac{k}{n}\Big)^2 R_{n,k}(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n} (nx-k)^2 R_{n,k}(x) \leqslant \dfrac{1}{4n}$

      iii. Prouver que $\sum\limits_{k\in\mathcal{B}} \Big| f(x) - f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)\Big| R_{n,k}(x) \leqslant \dfrac{\|f\|}{2n\alpha^2}$.

      iv. Montrer finalement que $\|f - B_n(f)\| \leqslant \varepsilon + \dfrac{\|f\|}{2n\alpha^2}$.

   (d) En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.