Approximations de π à l'aide de développements limités

Au dix-septième siècle, des mathématiciens comme Huyghens et Snellius entreprirent de calculer des valeurs décimales approchées de π par des méthodes trigonométriques élémentaires. Il s'agissait d'améliorer la double inégalité classique $\sin x < x < \tan x$ valable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ en introduisant des fonctions :

- Qui s'expriment simplement à l'aide des fonctions trigonométriques usuelles.
- Peu différentes de x au voisinage de 0.

Les fonctions f_1 et f_4 de l'énoncé sont celles de Snellius ; f_2 et f_3 sont celles de Huyghens.

1. Soient a, b des réels positifs ou nuls. On pose $m(a,b) = \dfrac{2a+b}{3}$ et $g(a,b) = \sqrt[3]{a^2 b}$.
   Comparer $m(a,b)$ et $g(a,b)$.
2. Dans toute la suite, on définit les fonctions suivantes sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$f_1(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}\left(8\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$$
$$f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \tan x}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}\left(2\sin x + \tan x\right)$$
   Calculer les développements limités en 0 de ces fonctions, à l'ordre 5.
   En déduire l'existence de $\eta > 0$ tel que : $\forall\, x \in]0, \eta[,\ f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x)$.
3. On suppose ici que x appartient à $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Quel est le signe de $f_4(x) - f_3(x)$?
4. On pose $u(x) = 3(2+\cos x)(f_2(x) - f_1(x))$. Linéariser $u(x)$.
   Montrer que $u'(x) = P(\cos\frac{x}{2})$, où P est un polynôme de degré 4. Factoriser P.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $u'(x)$ puis celui de $f_2(x) - f_1(x)$.
5. On pose $v(x) = x - f_2(x)$. Montrer que $v'(x) = Q(\cos\frac{x}{2})$, où Q est un polynôme.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $v'(x)$ puis celui de $v(x)$.
6. On pose $w(x) = f_3(x) - x$. Calculer et factoriser $w'(x)$.
   En déduire, pour x dans I, le signe de $w(x)$.
   Quelle suite d'inégalités les questions 3 à 6 permettent-elles d'obtenir sur I ?
7. Seules les valeurs des fonctions trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont supposées connues.
   Calculer des expressions simples de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.
   Faire de même avec $\sin\frac{\pi}{24}$ à l'aide de radicaux superposés.
   Calculer les expressions par radicaux de $X = 12 f_2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $Y = 12 f_3\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   En déduire un encadrement de π.