La méthode de Newton-Raphson

I. Généralités sur la méthode

Soit g une application définie sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose en outre que $g([a, b]) \subset [a, b]$: le segment $[a, b]$ est donc *stable* par g.

1. On suppose que g est continue sur $[a, b]$.
   Montrer que l'équation (E) : $g(x) = x$ possède *au moins une solution* sur $[a, b]$.
2. On suppose que g est k-lipschitzienne sur $[a, b]$, avec $0 \leqslant k < 1$.
   Montrer que l'équation (E) possède *une solution unique* α sur $[a, b]$.
3. On garde les hypothèses de la question précédente. On se donne un réel x_0 dans $[a, b]$.
   On définit alors une suite (x_n) de $[a, b]$ en posant : $\forall\, n \geqslant 0,\ x_{n+1} = g(x_n)$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|x_n - \alpha| \leqslant k^n\, |x_0 - \alpha|$. Conclusion ?
4. On suppose maintenant que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et que : $\forall\, x \in [a, b],\ |g'(x)| < 1$.
   Montrer qu'on peut conclure comme dans les questions 2 et 3.
5. On reprend les hypothèses de I.4, et les notations de I.3.
   On suppose que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas stationnaire en α. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$.
6. On suppose ici que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
   On suppose qu'il existe α dans I tel que $g(\alpha) = \alpha$ et $|g'(\alpha)| < 1$.
   Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $J = [\,\alpha - \delta, \alpha + \delta\,] \subset I$ et tel que : $\forall\, x \in J,\ |g'(x)| < 1$.
   Établir que J est *stable* par g, c'est-à-dire $g(J) \subset J$, et qu'on peut y appliquer les résultats précédents.
7. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert I, à valeurs réelles.
   On suppose qu'il existe α dans I tel que $f(\alpha) = 0$.
   On suppose que f' ne s'annule pas sur I et on pose : $\forall\, x \in I,\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si on se donne x_0 dans $J = [\,\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, et si on définit $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout n, alors la suite (x_n) converge vers α.
   (b) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant K\, |x_n - \alpha|^2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Indication : appliquer une inégalité de Taylor-Lagrange à f sur le segment $[x_n, \alpha]$. on pourra également justifier que l'application $x \mapsto |f'(x)|$ possède un minimum strictement positif sur J.
8. On garde les hypothèses et les notations de la question 7. La *méthode de Newton* consiste en la mise en place de la suite (x_n) pour approcher la racine α de f sur I. On vient de voir que la suite (x_n) converge vers α si x_0 est "assez près" de α. On étudie ici, sur deux exemples, le comportement de la suite (x_n) si x_0 est choisi de façon quelconque dans I.
   (a) Montrer que x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe Ox avec la tangente en $(x_n, f(x_n))$ à la courbe $y = f(x)$. Faire un dessin montrant x_0, x_1, x_2 dans un cas assez général.
   (b) On suppose que f est convexe sur $I = \mathbb{R}$. Montrer que la suite (x_n) a la monotonie contraire de celle de f (à partir de x_1) et qu'elle converge vers α (quel que soit x_0).
   Indication : justifier le fait que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$; montrer que g' a le signe de f ; discuter suivant la monotonie de f et suivant la position de x_0 par rapport à α.
   Préciser rapidement ce qu'il en est si f est concave.
   (c) On suppose par exemple $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = \arctan x$. Dans ces conditions $\alpha = 0$.
   Justifier l'existence et l'unicité de $a > 0$ tel que $g(a) = -a$.
   En considérant l'application $g \circ g$, montrer alors que :
   – Si $|x_0| < a$, la suite (x_n) converge vers 0.
   – Si $|x_0| = a$, la suite (x_n) est 2-périodique, ne prenant que les valeurs a et $-a$.
   – Si $|x_0| > a$, la suite (x_n) est divergente.

II. Application aux polynômes

Soit $P = x^d + \sum\limits_{k=0}^{d-1} a_k x^k$ un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $d \geqslant 2$.

1. Montrer que pour toute racine réelle ou complexe λ de P, on a $|\lambda| \leqslant \max\Big(1, \sum\limits_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big)$.
   Indication : raisonner par la contraposée.
2. Dorénavant, on suppose que toutes les racines de P sont réelles.
   Montrer que toutes les racines du polynôme P' sont elles aussi réelles.
3. On note α la plus grande racine de P. On pose $I =]\,\alpha, +\infty\,[$ et $\overline{I} = [\,\alpha, +\infty\,[$.
   Montrer que les applications $P, P', \ldots, P^{(d)}$ sont strictement positives sur I.
4. On pose $g(x) = x - P(x)/P'(x)$ pour tout x de I.
   (a) Montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{I} = [\,\alpha, +\infty\,[$.
   (b) Montrer que si α est racine simple de P, alors $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) = P''(\alpha)/P'(\alpha)$.
   (c) Montrer que si α est racine de multiplicité $m \geqslant 2$ de P, alors $g'(\alpha) = 1 - 1/m$.
5. (a) Montrer que g est strictement croissante sur $\overline{I}$ et que $g(\overline{I}) \subset \overline{I}$.
   (b) On se donne $x_0 > \max\Big(1, \sum\limits_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $x_{n+1} = g(x_n)$.
   Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.
6. On étudie ici la rapidité globale (sur tout I) de la convergence de (x_n) vers α. On constate en particulier que cette "vitesse" est une fonction décroissante du degré d de P.
   On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_q$ les différentes racines de P (donc $\lambda_q = \alpha$.)
   Pour chaque k de $\{1, \ldots, q\}$, on note m_k la multiplicité de λ_k comme racine de P.
   (a) Pour tout réel x différents des λ_k, on note $R(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$. Montrer que $R(x) = \sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{m_k}{x - \lambda_k}$.
   (b) Prouver que $R^2(x) \leqslant -d\, R'(x)$, pour tout x distinct des λ_k.
   (c) En déduire : $\forall\, x \in I,\ 0 < g'(x) \leqslant 1 - \frac{1}{d}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n - \alpha \leqslant \Big(1 - \frac{1}{d}\Big)^n (x_0 - \alpha)$.
7. Dans cette question, on étudie la rapidité de convergence de (x_n) vers α, d'un point de vue local (à proximité de α.) On constate que si α est racine simple de P, la convergence est beaucoup plus rapide que s'il est racine multiple.
   (a) On suppose que α est racine simple de P. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \dfrac{P''(\alpha)}{2P'(\alpha)}$.
   On exprime cette situation en disant que la convergence de (x_n) vers α est de type au moins *quadratique*. En gros le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape (à proximité de α, dans la limite des capacités de la calculatrice.)
   (b) Montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \geqslant 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \dfrac{1}{m}$.
   Ici la vitesse de convergence est donc seulement *linéaire*.
8. On va modifier la méthode de Newton pour que la vitesse de convergence de (x_n) vers α soit toujours quadratique, même si α est une racine multiple de P.
   (a) Montrer que α est une racine simple de $f = P/P'$.
   (b) On garde x_0 comme en (I.5.b) mais on utilise cette fois $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.
   Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et des valeurs de P, P', P'' en x_n.