Un système tridiagonal symétrique

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } |j-i| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Ainsi $A_1 = (0)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $P_n(x) = \det(A_n + xI_n)$ pour $n \geqslant 1$.
Par convention, on pose $P_0(x) = 1$.

Aini $P_1(x) = |\,x\,| = x$, $P_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$, $P_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$, $P_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

1. Préciser les expressions de $P_3(x)$ et de $P_4(x)$
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout $n \geqslant 2$, on a $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application P_n est une fonction polynomiale unitaire de degré n, et qu'elle a la même parité que n.
4. On fixe dans $\mathbb{R}$ la valeur de x, et on pose $u_n = P_n(x)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si $x = 2\varepsilon$ (où $\varepsilon = \pm 1$) $u_n = (n+1)\varepsilon^n$.
   (b) Montrer que si x n'est pas dans $\{-2, 2\}$, alors $u_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, en notant α et β les racines distinctes de l'équation $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$.
   (c) On suppose $|x| < 2$. Avec $\theta = \arccos \dfrac{x}{2}$, montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
5. Calculer $I_{n,m} = \displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, P_n(x)\, P_m(x)\, \mathrm{d}x$, pour tous n, m dans $\mathbb{N}$.
6. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme P_n possède n zéros distincts, tous réels, et donnés par : $\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ a_{n,k} = 2\cos\theta_{n,k}$, avec $\theta_{n,k} = \dfrac{k\pi}{n+1}$.
   (b) Montrer alors que $P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$.
7. On se donne un réel λ et on considère le système $(S_{n,\lambda})$ défini par $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \ldots \\ x_{n-2} + \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \end{cases}$
   (a) Résoudre $(S_{n,\lambda})$ quand $\lambda \notin \{a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}\}$.
   (b) On suppose que $\lambda = a_{n,k} = 2\cos\theta_{n,k}$.
   Montrer alors que le système est de rang $n-1$, et que l'ensemble des solutions est la droite engendrée par $v_n = (\sin\theta_k, -\sin 2\theta_k, \ldots, (-1)^{n-1}\sin n\theta_k)$.