Raisonnement par l'absurde

Exercice 1

On se donne trois réels x, y, z positifs tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.
Montrer que x, y, z sont distincts de 1 et que $\min(x, y, z) < 1$.

Exercice 2

Montrer qu'aucun entier $(6m + n)(m + 6n)$ (avec m, n dans $\mathbb{N}$) n'est une puissance de 2.

Exercice 3

Soit $A \subset \mathbb{N}^*$, non vide et finie, telle que : $\forall\,(m, n) \in A^2, \dfrac{m + n}{m \wedge n} \in A$. Montrer que $A = \{2\}$.

Exercice 4

On colore tous les points du plan, arbitrairement, soit en bleu soit en rouge.
Montrer qu'il existe au moins un triangle équilatéral dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 5

On suppose qu'il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de n entiers relatifs (avec $n \geqslant 11$) tels que :

— La somme de sept termes consécutifs est toujours strictement négative.

— La somme de onze termes consécutifs est toujours strictement positive.

Montrer que $11 \leqslant n \leqslant 16$ (et trouver une solution pour $n = 16$.)

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante et vérifiant (1) : $\forall\,(m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(mf(n)) = n^2 f(mn)$.
Montrer (2) : $f(f(n)) = n^2 f(n)$ puis (3) : $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous entiers m et n.
En déduire l'égalité $f(n) = n^2$ pour tout n (pour cette question, raisonner par l'absurde.)

Exercice 7

Montrer que la seule solution du système $(S) : \begin{cases} y = 2 - x^3 \\ x = 2 - y^3 \end{cases}$ est le couple $(1, 1)$.

Exercice 8

Soit z une racine de $P = 11X^{10} + 10iX^9 + 10iX - 11$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que $|z| = 1$.

Exercice 9

Pour quels n de $\mathbb{N}^*$ le polynôme $P(x) = x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n$ a-t-il une racine dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 10

Montrer qu'il n'existe pas trois entiers naturels a, b, c tel que $P(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ soit un carré parfait pour tout n (indication : considérer la différence $P(n + 2) - P(n)$ modulo 4.)