Exercice 1

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (méthode du pivot).
2. On pose $\varepsilon_1 = (1,-1,2,2)$, $\varepsilon_2 = (-1,-1,2,4)$, $\varepsilon_3 = (1,0,0,0)$, $\varepsilon_4 = (1,0,1,0)$.
   Vérifier que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Prouver que la matrice de l'endomorphisme φ dans cette base est $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $(A - I_4)^3 = 0$. Calculer A^2.
5. Utiliser les résultats de la question (4) pour retrouver celui de la question (1).
6. Montrer qu'il existe trois suites réelles $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ telles que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_4$ (on donnera l'expression de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$).
7. Montrer que la formule donnant A^n est encore vraie pour les exposants négatifs.
8. On appelle *commutant* de A l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
   Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de dimension 6 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
   Indication : cette question est liée au résultat de la question (3).
   On ne cherchera pas à donner la forme générale des matrices de $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 2

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose $M(t) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1-3t+2t^2 \\ 1-t^2 & 4+2t^2 & 1-t^2 \\ 1-3t+2t^2 & 4-4t^2 & 1+3t+2t^2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que, pour tous réels t, u, on a $M(t)M(u) = M(tu)$.
2. Montrer que $M(t)$ est inversible si et seulement si t est non nul, et préciser alors $M(t)^{-1}$.
3. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et que $P^{-1}M(t)P$ est diagonale.
4. Du résultat de la question 3, déduire une nouvelle preuve de l'égalité $M(t)M(u) = M(tu)$.