Polynômes P tels que $P(X)$ divise $P(X^n)$

Dans ce problème, on considère des polynômes à coefficients complexes.

Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

1. Un polynôme Q, normalisé de degré 2, s'écrit : $Q(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + p\mathrm{X} + q$.
   On note a et b ses zéros, distincts ou non.
   (a) Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q.
   (b) Déterminer p et q pour que les zéros de Q soient a^2 et b^2.
2. Soit A un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $A(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   Donner la liste des polynômes A tels que $A(\mathrm{X})$ divise $A(\mathrm{X}^2)$.
3. Soit B un polynôme normalisé de degré 2, de zéros a et b : $B(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$.
   (a) Donner la liste des polynômes B tels que $B(\mathrm{X})$ divise $B(\mathrm{X}^3)$.
   (b) Montrer (sans l'aide de cette liste) que si $B(\mathrm{X})$ est l'un de ces polynômes, alors $B(-\mathrm{X})$ en est un aussi.
4. Un polynôme $P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + p\mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} + r$, normalisé de degré 3, a pour zéros a, b, c.
   (a) Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r.
   (b) Déterminer p, q, r pour que les zéros de P soient a^2, b^2 et c^2.
   (c) Donner la liste de ces polynômes P et vérifier que pour chacun d'eux :
   $P(\mathrm{X}^2) = -P(\mathrm{X})P(-\mathrm{X})$.
5. Parmi les polynômes P précédents, on notera F_1 et F_2 les deux polynômes qui ne sont pas à coefficients tous réels.
   (a) Calculer le produit $F_1(\mathrm{X})F_2(\mathrm{X})$.
   (b) Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2.
   (c) Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros de F_1 et F_2.
   (d) Former les polynômes normalisés Φ_1 et Φ_2, de degré 3, ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2.
   (e) Former le polynôme H tel que : $H(X) = 64X\Phi_1(X)\Phi_2(X)$.
   (f) Montrer que $\sin 7\theta = -H(\sin\theta)$, $\quad \cos 7\theta = H(\cos\theta)$, $\quad \cosh 7\theta = H(\cosh\theta)$.
6. On définit une relation $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow H(x) = H(y)$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Décrire la classe d'équivalence de x, quand $|x| > 1$ puis quand $|x| \leqslant 1$
   (c) On note Γ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $H(x) = H(y)$.
   Etablir que Γ est la réunion d'une droite et de trois ellipses.
   Construire Γ avec Maple.