Polynômes d'endomorphismes

Dans tout le problème E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit φ est un endomorphisme quelconque de E.

On note $\varphi^0 = \text{Id}$, et $\varphi^{k+1} = \varphi \circ \varphi^k$ pour tout entier naturel k.

1. Algèbre des polynômes d'un endomorphisme.

   Pour tout $A = \sum a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$ on note $A(\varphi) = \sum a_k \varphi^k$.

   Par exemple, si $A = 1$ alors $A(\varphi) = \text{Id}$, et si $A = 1 - 2X + X^3$ alors $A(\varphi) = \text{Id} - 2\varphi + \varphi^3$.

   On note $\mathbb{K}[\varphi] = \{A(\varphi),\ A \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des *polynômes de l'endomorphisme* φ.

   Montrer que pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$, et pour tous α, β de $\mathbb{K}$, on a les égalités

   $(\alpha A + \beta B)(\varphi) = \alpha A(\varphi) + \beta B(\varphi)$ et $A(\varphi) \circ B(\varphi) = (AB)(\varphi)$.

   En déduire que $\mathbb{K}[\varphi]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

2. Le lemme des noyaux

   (a) Montrer que si A divise B dans $\mathbb{K}[X]$, alors $\ker A(\varphi) \subset \ker B(\varphi)$.

   (b) Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, premiers entre eux. Soit $C = AB$.
   Montrer que $\ker C(\varphi) = \ker A(\varphi) \oplus \ker B(\varphi)$.
   Indication : tant pour la somme directe que pour l'inclusion $\ker C(\varphi) \subset \cdots$, on utilisera une identité de Bezout sur A et B, et le résultat de la question précédente.

   (c) Généraliser le résultat précédent pour obtenir le *Lemme des noyaux* :

   Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m \geqslant 2)$ une famille de m polynômes premiers entre eux deux à deux.
   Soit $C = \prod_{k=1}^{m} A_k$ leur produit. Alors $\ker(C(\varphi)) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker A_k(\varphi)$.

3. Une application du lemme des noyaux.

   Dans cette question seulement E est l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\varphi : f \mapsto f'$ désigne l'opérateur de dérivation sur E.

   Pour tout λ de $\mathbb{K}$, et tout f de E, on note f_λ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = f(x)\text{e}^{-\lambda x}$.

   (a) Préciser le noyau de φ^k, pour tout k de $\mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $\psi_\lambda : f \mapsto f_\lambda$ est un automorphisme de E et préciser ψ_λ^{-1}.

   (c) Vérifier que $\psi_\lambda^{-1} \circ \varphi \circ \psi_\lambda = \varphi - \lambda \text{Id}_E$.

   (d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, que le noyau de $(\varphi - \lambda \text{Id}_E)^k$ est l'ensemble des applications $f : x \mapsto P(x)\text{e}^{\lambda x}$, où P est un polynôme de degré strictement inférieur à k.

   (e) On considère l'équation différentielle $y^{(6)} - 3y^{(5)} + 6y^{(3)} - 3y'' - 3y' + 2y = 0$, dans laquelle l'application $x \mapsto y(x)$ est un élément inconnu de E. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.
   Interpréter $\mathcal{S}$ comme le noyau d'un polynôme $P(\varphi)$ de l'endomorphisme φ.
   Factoriser P et en déduire $\mathcal{S}$ en utilisant le lemme des noyaux.

   (f) Résoudre de même l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$.

4. Polynômes annulateurs d'un endomorphisme.

   φ désigne à nouveau un endomorphisme quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   On dit qu'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de φ si $A(\varphi) = 0$.
   On note $\text{Ann}(\varphi) = \{A \in \mathbb{K}[X],\ A(\varphi) = 0\}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de φ.

   (a) Montrer que $\text{Ann}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   (b) Vérifier que pour tout A de $\text{Ann}(\varphi)$ et tout B de $\mathbb{K}[X]$, alors AB est dans $\text{Ann}(\varphi)$.

   (c) Prouver que si $\dim E < \infty$ alors $\text{Ann}(\varphi)$ n'est jamais réduit au polynôme nul.

   (d) Montrer que le résultat précédent n'est plus vrai en dimension infinie (on pensera par exemple à la dérivation $\varphi : f \mapsto f'$ sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$).

5. Polynôme minimal d'un endomorphisme

   φ désigne toujours un endomorphisme quelconque d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   On suppose que l'ensemble $\text{Ann}(\varphi)$ n'est pas réduit au polynôme nul.

   (a) Soit d le degré minimum des polynômes non nuls de $\text{Ann}(\varphi)$. Montrer que $d \geqslant 1$ et qu'on peut choisir dans $\text{Ann}(\varphi)$ un polynôme, noté A, normalisé et de degré d.

   (b) Montrer que tout B de $\text{Ann}(\varphi)$ est multiple de A (indication : division euclidienne).

   (c) Prouver finalement que $\text{Ann}(\varphi)$ est exactement l'ensemble des multiples du polynôme A, et que ce dernier est le seul polynôme unitaire à posséder cette propriété.
   On dit A est le *polynôme minimal* de φ, et on note $A = \mu(\varphi)$.

   (d) Préciser le polynôme minimal de l'endomorphisme φ dans les cas particuliers suivants :
   (i) $\varphi = 0$, (ii) $\varphi = \text{Id}_E$, (iii) φ est une projection, (iv) φ est une symétrie.
   Que peut-on dire du polynôme minimal $\mu(\varphi)$ si l'endomorphisme φ est nilpotent ?

   (e) Quel est le polynôme minimal de l'endomorphisme φ étudié dans l'exercice ?