Points d'équilibre dans le plan

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté.
Soit $\mathcal{E} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble de n points distincts de $\mathbb{R}^2$ ($n \geqslant 2$, fixé).
Tout point M de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$ subit de la part de chacun des points A_k une force $\overrightarrow{F_k(M)} = \dfrac{\overrightarrow{MA_k}}{MA_k^2}$.
On note $d(\mathcal{E}) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E},\ \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k(M)} = \overrightarrow{0}\right\}$ l'ensemble des "positions d'équilibre".

1. Déterminer $d(\mathcal{E})$ dans le cas particulier $n = 2$.
2. Dans cette question, on suppose que les points A_k sont sur une même droite Δ.
   (a) Montrer que $d(\mathcal{E})$ est inclus dans la droite Δ.
   (b) Montrer que $d(\mathcal{E})$ est formé de $n-1$ points distincts de $\Delta \setminus \mathcal{E}$.
   On précisera comment ces points se répartissent par rapport aux A_k.
   Indication : munir Δ d'un repère $(\Omega, \overrightarrow{u})$, noter α_k l'abscisse de chaque A_k dans ce repère, et supposer par exemple $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.
3. À partir de cette question, on revient au cas général.
   On note a_k l'affixe de chaque A_k. On pose $Q = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
   (a) Soit M un point de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{E}$, d'affixe z.
   Montrer que M est dans $d(\mathcal{E})$ si et seulement si $Q'(z) = 0$.
   On en déduit évidemment que $d(\mathcal{E})$ est non vide, et que $\operatorname{card}(d(\mathcal{E})) \leqslant n-1$.
   (b) Si $\operatorname{card}(d(\mathcal{E})) = n-1$, montrer que $\mathcal{E}$ et $d(\mathcal{E})$ ont même isobarycentre.
   (c) On suppose toujours $\operatorname{card}(d(\mathcal{E})) = n-1$.
   Soit $\mathcal{E}'$ un autre ensemble de n points distincts du plan tel que $d(\mathcal{E}') = d(\mathcal{E})$.
   Montrer que les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont disjoints ou confondus.
4. (a) Montrer que si s est une similitude du plan, alors $s(d(\mathcal{E})) = d(s(\mathcal{E}))$.
   (b) On suppose que $d(\mathcal{E})$ est réduit à un point.
   Montrer que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygône régulier.
   (c) Montrer que la réciproque de la question précédente est vraie.
5. On suppose ici que $n = 4$ et que $\mathcal{E}$ est un rectangle non aplati, non carré.
   Montrer que $\operatorname{card}(d(\mathcal{E})) = 3$ et que $d(\mathcal{E}) = \{0, F, F'\}$ où O est le centre de $\mathcal{E}$ et où F, F' sont les foyers de l'ellipse inscrite dans $\mathcal{E}$ et tangente aux cotés de $\mathcal{E}$ en leur milieu.
   (on pourra se ramener au cas où $\mathcal{E}$ est centré en 0 et de cotés parallèles aux axes).

