Partitions d'un ensemble fini, surjections, involutions

Soit E un ensemble fini non vide.

Pour tout entier k, on dit que $\{A_1, \ldots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si :

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E; \qquad \forall i, A_i \neq \emptyset; \qquad \forall i, j \text{ (avec } i \neq j),\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $\text{Card}(E) = n$.

On note $r(n)$ le nombre de partitions de E. On note $r(0) = 1$.

Pour tout $k \geq 1$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en k classes.

1. Montrer que : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*,\ k > n \Rightarrow r(n, k) = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ r(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r(n, k)$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r(n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r(k)$.
4. Calculer $r(n)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
5. Montrer que : $\forall\, n \geq 5,\ r(n) \geq 2^n$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ r(n) \leq n^n$.
6. On note S_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.

   Montrer que : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n^k = k!\, r(n, k)$.

Partie II

On suppose que $\text{Card}(E) = 2m$, avec $m \geq 1$.

On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont des paires.

1. Déterminer a_1, a_2, a_3. Par convention, on pose $a_0 = 1$.
2. Montrer que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ a_m = (2m - 1)a_{m-1}$.
3. En déduire $a_m = \dfrac{(2m)!}{2^m m!}$.

Partie III

On suppose que $\text{Card}(E) = n$, avec $n \geq 1$.

On note b_n le nombre de partitions de E en classes qui sont des paires ou des singletons.

1. Déterminer b_1, b_2, b_3, b_4.
2. On suppose que $n = 2m$ $(m \geq 1)$. Montrer que : $b_{2m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} a_{m-k}$.

   Indication : classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent.
3. Montrer que : $\forall\, n \geq 3,\ b_n = b_{n-1} + (n - 1)b_{n-2}$.
4. Calculer b_n, pour $1 \leq n \leq 10$.
5. Calculer le nombre d'applications involutives dans un ensemble à 10 éléments.