Parties infinies de $\mathbb{N}$

On dit que deux ensembles A et B sont en bijection s'il existe une bijection de A dans B (ou de B dans A ce qui est évidemment équivalent).

Partie I

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On va montrer que A est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on définit bien une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de la manière suivante :
   - a_0 est le plus petit élément de l'ensemble A.
   - Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_n est le plus petit élément de $A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.
     (par exemple a_1 est le plus petit élément de l'ensemble X privé de a_0 ; ensuite a_2 est le plus petit élément de l'ensemble X privé de a_0 et a_1, etc.)
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $A_n = A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ (et par convention $A_0 = A$).
   Avec cette notation, on a donc $a_n = \min A_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}$, vérifier que $A_{n+1} \subset A_n$ et en déduire $a_{n+1} > a_n$.
   Conclure alors à l'injectivité de l'application $n \mapsto a_n$ de $\mathbb{N}$ dans A.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que a_n est supérieur ou égal à n.
   En déduire que, pour tout m de A, il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $a_k > m$.
4. Pour tout m de A, déduire de la question (3) qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $a_n = m$.
   En déduire que A et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Partie II

1. Soit X un ensemble infini.
   (a) On suppose qu'il existe une application injective de X dans $\mathbb{N}$.
   En utilisant le résultat de la partie I, montrer que X et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
   (b) Soit Y un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$.
   On suppose qu'il existe $f : X \to Y$ injective. Montrer que X et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
2. En considérant f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(n) = (3n + 1)^2$, montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
3. Soit f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(m, n) = (m + n)^2 + n$.
   (a) On se donne (m, n) et (m', n') dans $\mathbb{N}^2$.
   Montrer que si $m' + n' > m + n$, alors $f(m', n') > f(m, n)$.
   (b) En déduire que f est injective, puis que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
4. (a) Soient A et B deux ensembles en bijection avec $\mathbb{N}$.
   En utilisant ce qui précède, montrer que $A \times B$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
   (b) Plus généralement, on suppose que $A_1, \ldots, A_n$ sont en bijection avec $\mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$.
   Montrer alors que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
5. On sait que tout nombre rationnel x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = p/q$ avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$, la fraction étant “non simplifiable’).
   Utiliser cette propriété pour montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.
6. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas en bijection.