Matrices et carrés magiques

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} le coefficient de A en ligne i, colonne j. On note $A = (a_{ij})$.

On note I_n la matrice identité d'ordre n

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: pour tout couple (i,j) de $\{1,\ldots,n\}^2$, E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en position (i,j), qui vaut 1.

Pour toute matrice $A = (a_{ij})$ et tous entiers i,j de $\{1,\ldots,n\}$, on note :

$$\varphi_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \quad , \quad \psi_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \quad , \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad , \quad \delta(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-i}$$

Ainsi : $\begin{cases} \varphi_i(A) \text{ est la somme des coefficients de la } i\text{-ème ligne de } A. \\ \psi_j(A) \text{ est la somme des coefficients de la } j\text{-ème colonne de } A. \\ \operatorname{tr}(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{principale} \text{ de } A \text{ (la trace de } A). \\ \delta(A) \text{ est la somme des coefficients de la diagonale } \textit{non principale} \text{ de } A. \end{cases}$

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \varphi_i(A) = \psi_j(A)$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{P}_n$, on note $\sigma(A)$ la valeur commune des quantités $\varphi_i(A)$ et $\psi_j(A)$.

On note $\mathcal{Q}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ des matrices A qui vérifient en outre $\operatorname{tr}(A) = \delta(A) = \sigma(A)$.

Les matrices de $\mathcal{P}_n$ sont dites *semi-magiques* ; celles de $\mathcal{Q}_n$ sont dites *magiques*.

On dit qu'une matrice magique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un *carré magique* d'ordre n si l'ensemble des coefficients de A est égal à $\{1, 2, \ldots, n^2\}$.
Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques d'ordres respectifs 3, 4, 5.

Partie I

1. *Question préliminaire*

   Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

   Soit $f_1, f_2, \ldots, f_p$ une famille de p formes linéaires indépendantes sur $\mathcal{E}$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$.

   Soit $\mathcal{H} = \{x \in \mathcal{E}, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_p(x) = 0\}$.

   Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ de $\mathcal{E}$.
   Indication : compléter la famille $f_1, \ldots, f_p$ en une base (f) du dual de $\mathcal{E}$, puis introduire la base (e) de $\mathcal{E}$ dont (f) est la base duale.

2. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer rapidement que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont liées.
4. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sont libres.
   On utilisera les matrices E_{kn} (avec $1 \leqslant k \leqslant n$) puis les E_{nk} (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$).
5. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{P}_n$.
   Pour tout i de $\{1, \ldots, n-1\}$, on pose $\Phi_i = \varphi_i - \varphi_n$ et $\Psi_i = \psi_i - \varphi_n$.
   (a) Montrer que les formes linéaires $\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ sont indépendantes.
   (b) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ on a les égalités :
   $\Phi_1(A) = \cdots = \Phi_{n-1}(A) = \Psi_1(A) = \ldots = \Psi_{n-1}(A) = 0$.
   (c) En déduire que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace de dimension $n^2 - 2n + 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Dans cette question, on cherche la dimension de $\mathcal{Q}_n$.
   On rappelle que l'application $A \to \sigma(A)$ est la forme linéaire définie sur $\mathcal{P}_n$ par la restriction commune à $\mathcal{P}_n$ de chacune des formes linéaires φ_i et ψ_j.
   (a) Identifier les matrices de $\mathcal{P}_2$ et celle de $\mathcal{Q}_2$.
   (b) On suppose provisoirement que n est supérieur ou égal à 3.
   Soient f, g les formes linéaires sur $\mathcal{P}_n$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}_n \begin{cases} f(A) = \operatorname{tr}(A) - \sigma(A) \\ g(A) = \delta(A) - \sigma(A) \end{cases}$
   Montrer que f et g sont indépendantes (indication : utiliser deux matrices A particulières de $\mathcal{P}_n$ telles que $\sigma(A) = 0$.)
   (c) Déduire de ce qui précéde que $\mathcal{Q}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 2n$ si $n \geqslant 3$, et de dimension 1 si $n = 2$.

Partie II

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$.
   Quelle est alors la signification de λ ?
2. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En est-il de même de $\mathcal{Q}_n$?
3. Montrer que l'application σ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{P}_n$.
   (a) On suppose que A est inversible.
   Montrer alors que $\sigma(A)$ est non nul, que A^{-1} est dans $\mathcal{P}_n$ et que $\sigma(A^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$.
   (b) Réciproquement, on suppose seulement que $\sigma(A)$ est non nul.
   Peut-on en conclure que A est inversible ?
5. Pour $n = 3$ et $n = 4$, trouver une matrice A de $\mathcal{Q}_n$ dont le carré n'est pas dans $\mathcal{Q}_n$.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que n est égal à 3.

1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{Q}_n$. On note $\alpha = a_{22}$.
   (a) Montrer que $\sigma(A) = 3\alpha$.
   (b) Montrer que $B = A - \alpha J_3 = (b_{ij})$ est un élément de $\mathcal{Q}_3$ tel que $\sigma(B) = 0$.
   (c) On note $\beta = b_{11}$ et $\gamma = b_{31}$. Exprimer B en fonction α, β, γ.
   Montrer que $A = \begin{pmatrix} \beta+\alpha & -\beta+\gamma+\alpha & -\gamma+\alpha \\ -\beta-\gamma+\alpha & \alpha & \beta+\gamma+\alpha \\ \gamma+\alpha & \beta-\gamma+\alpha & -\beta+\alpha \end{pmatrix}$
   (d) Réciproquement, vérifier que l'expression précédente de A donne toutes les matrices de l'espace vectoriel $\mathcal{Q}_3$.
   Retrouver ainsi que $\mathcal{Q}_3$ est de dimension 3 et en préciser une base.

2. On reprend l'expression générale de la matrice A de $\mathcal{Q}_n$ vue dans la question (1c).
   (a) Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ sont des entiers relatifs vérifiant les conditions $|\beta+\gamma| \leqslant \alpha$ et $|\beta-\gamma| \leqslant \alpha$.
   Montrer que A est à coefficients dans $\mathbb{N}^* \iff$ ces inégalités sont strictes.
   (b) Montrer que ces deux conditions sur α, β, γ équivalent à dire que le point $\Omega(\beta, \gamma)$ du plan appartient (respectivement est intérieur) au domaine carré K_α dont les sommets sont les points $(\pm\alpha, 0)$, et $(0, \pm\alpha)$.
   (c) Pour tout entier naturel α, déterminer le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à la frontière du domaine K_α, puis le nombre de tels points qui appartiennent à K_α (bords compris).
   (d) En déduire que pour tout entier naturel α, il y a :
   — $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}$.
   — $2\alpha^2 - 2\alpha + 1$ matrices A de $\mathcal{Q}_n$ qui sont à coefficients dans $\mathbb{N}^*$.

3. On se propose de trouver tous les carrés magiques A d'ordre 3.
   (a) Montrer que le coefficient a_{22} est nécessairement égal à 5.
   (b) Montrer qu'à une rotation ou à une symétrie près du tableau A, on peut toujours se ramener à $a_{11} = 1$ ou à $a_{21} = 1$.
   (c) En déduire les 8 carrés magiques d'ordre 3.

4. Calculer les déterminants des matrices A, B et C, utilisées comme exemples dans le préambule du problème.