Lancers de dés « chanceux »

On considère un dé cubique *honnête* dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, un « n-jeu » consiste en n lancers successifs de ce dé, en relevant chacun des résultats obtenus. Un tel n-jeu peut donc être modélisé par un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où chaque a_k (élément de $\{1, \ldots, 6\}$) désigne le résultat obtenu lors du k-ième lancer.

Soit q un entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'un n-jeu est *q-chanceux* si le dé ne renvoie jamais q lancers successifs identiques.

Par exemple $(6, 5, 1, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 2)$ est un 10-jeu qui est 4-chanceux mais qui n'est pas 3-chanceux.

On note u_n le nombre de n-jeux qui sont q-chanceux.

On note p_n la probabilité pour qu'un n-jeu soit q-chanceux.

I. Quelques résultats généraux, et le cas particulier $q = 2$

1. (a) Combien y a-t-il de n-jeux ? Quelle est donc la relation entre p_n et u_n ?
   (b) Que valent u_n et p_n pour $1 \leqslant n < q$? Que valent u_q et p_q ?
2. (a) Par un dénombrement, montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\ 5u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6u_n$.
   Quel encadrement en déduit-on pour p_n et p_{n+1} ?
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente (on ne demande pas sa limite).
   Prouver que $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant p_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Dans cette question, *et dans cette question seulement*, on suppose $q = 2$.
   (a) Calculer u_n, donc p_n, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (b) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$? À partir de quelle valeur de n a-t-on $p_n \leqslant \frac{1}{2}$?

II. Le cas particulier $q = 3$

Dans cette partie, on suppose que $q = 3$.

1. Rappelez rapidement les valeurs de u_1, u_2, u_3 donc celles de p_1, p_2, p_3
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation (E) : $\forall\, n \geqslant 3,\ u_n = 5(u_{n-1} + u_{n-2})$
   (on discutera suivant la façon dont se termine un n-jeu 3-chanceux : par deux lancers différents ou par deux lancers identiques ?)
   (b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 3$, on a l'égalité : $p_n = \frac{5}{36}(6p_{n-1} + p_{n-2})$.
   (c) Montrer alors que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
3. Dans cette question, on calcule une valeur explicite de u_n.
   (a) Calculer les deux solutions réelles r et s de l'équation $x^2 = 5(x + 1)$, avec $r < s$.
   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = \frac{2\sqrt{5}}{25}(s^{n+1} - r^{n+1})$.
   (b) En déduire l'expression de p_n pour $n \geqslant 1$.
   Retrouver alors la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) À partir de quelle valeur de n a-t-on $p_n \leqslant \frac{1}{2}$?

III. Étude du cas général

Dans cette partie, on suppose que l'entier q est fixé, avec $q \geqslant 2$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation (R_q) : $\forall\, n \geqslant q,\ u_n = 5\sum\limits_{k=1}^{q-1} u_{n-k}$

   (considérer le dernier résultat d'un n-jeu q-chanceux : par combien de résultats successifs identiques à celui-ci le n-jeu a-t-il bien pu se terminer ?)

   (b) Montrer alors que pour $n \geqslant q$, on a $p_n = 5\sum\limits_{k=1}^{q-1} \frac{p_{n-k}}{6^k}$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

2. On note (E_q) l'équation $x^{q-1} = 5(x^{q-2} + x^{q-3} + \cdots + x + 1) = 5\sum\limits_{k=2}^{q} x^{q-k}$.

   (a) Montrer que (E_q) équivaut à $\begin{cases} x^q - 6x^{q-1} + 5 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

   (b) En étudiant l'application $f_q : x \mapsto x^q - 6x^{q-1} + 5$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que l'équation (E_q) admet une solution réelle positive unique λ_q, et que $5 \leqslant \lambda_q < 6$.

3. On va utiliser la question précédente pour améliorer le résultat de (I2b)

   (a) Montrer que la suite de terme général $w_n = \lambda_q^n$ vérifie la relation (R_q).

   (b) Montrer alors que $u_n > \lambda_q^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Qu'en déduit-on pour la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$?

   (c) Application numérique. Pour $q = 5$, on trouverait $\lambda_q \approx 5.996132011$. En déduire que tant que $n \leqslant 1000$ la probabilité qu'un n-jeu soit 5-chanceux est supérieure à $1/2$.

   (d) Écrire une fonction Python calculant p_n quand $q = 5$.
   À partir de quelle valeur de n a-t-on effectivement $p_n < \frac{1}{2}$?

IV. Compléments

On reprend les notations de la partie III. On sait notamment que $\lambda_q^n \leqslant p_n \leqslant 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite $(\lambda_q)_{q\geqslant 2}$.

1. Montrer que la suite $(\lambda_q)_{q\geqslant 2}$ est strictement croissante.
   Indication : utiliser le signe la différence $f_{q+1} - f_q$ et la monotonie de f_q sur $[5, 6[$.

2. Montrer que $\lim\limits_{q\to+\infty} \lambda_q = 6$ (on écrira judicieusement l'égalité $f_q(\lambda_q) = 0$).

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0, 1[$, on pose $\varphi_n(x) = n\ln(1 - x^n) - \ln(1 - x)$.

   (a) Calculer $\psi_n(x) = (1 - x)(1 - x^n)\varphi_n'(x)$, avec n dans $\mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant x < 1$.

   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, on a $0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant \psi_{n+1}(x)$.

   (c) En déduire l'inégalité $(1 - x^n)^n \geqslant 1 - x$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

4. Dans cette question, on va montrer que λ_q converge très rapidement vers 6 (voir par exemple la valeur numérique indiquée dans la question II.3.c).
   Plus précisément, on va prouver que, pour tout $q \geqslant 2$, on a $\mu_q \leqslant \lambda_q \leqslant 6$, où $\mu_q = 6 - \frac{1}{6^{q-2}}$.

   (a) Calculer $f_q(\mu_q)$ et en déduire $\mu_q \leqslant \lambda_q \leqslant 6$ (en utilisant IV.3.c)

   (b) Quel encadrement en déduit-on pour p_n ?