Familles obtusangles

Dans tout le problème E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

1. On note m un entier strictement positif quelconque.
   Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de E, on note $G(u_1, \ldots, u_m)$ la matrice carrée d'ordre m et de terme général $(u_i \mid u_j)$ (à l'intersection de la ligne i et de la colonne j).
   On note $\Delta(u_1, \ldots, u_m) = \det(G(u_1, \ldots, u_m))$.
   (a) Dans ce cas particulier où $m = 2$, montrer que $\Delta(u_1, u_2) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_1$ sont colinéaires).
   (b) Dans le cas général, soit A la matrice des vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ dans une base orthonormée (e) de E. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_m) = {}^{\mathrm{t}}A\, A$.
   (c) Si si $m = n$, en déduire : $\Delta(u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0$ (avec $\Delta(u_1, \ldots, u_n) = 0 \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_n$ sont liés).
2. Soit $u_0, u_1, \ldots, u_m$ une famille de $m+1$ vecteurs *deux à deux distincts* de $\mathcal{S} = \{u \in E,\ \|u\| = 1\}$.
   Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   — Les distances $\|u_j - u_i\|$ (avec $j \neq i$ dans $\{0, \ldots, m\}$) sont toutes égales (autrement dit, les vecteurs u_k sont équidistants sur $\mathcal{S}$).
   — Les produits scalaires $(u_i \mid u_j)$ (avec $j \neq i$ dans $\{0, \ldots, m\}$) sont tous égaux.

Dans la suite de cette partie, on suppose que les conditions précédentes sont réalisées.

3. On note λ la valeur commune des produits scalaires $(u_i \mid u_j)$.
   Montrer que $-1 \leqslant \lambda < 1$ et que $\Delta(u_0, \ldots, u_m) = (1 + m\lambda)(1 - \lambda)^m$.
4. En déduire que si $u_0, \ldots, u_m$ sont libres alors $m < n$ et $-1/m < \lambda < 1$.
5. Dans cette question, on suppose que $u_0, \ldots, u_m$ sont liés.
   On dira dans ce cas que la famille $u_0, \ldots, u_m$ possède la propriété $\mathcal{P}_m$.
   (a) Montrer que $\lambda = -1/m$.
   (b) Montrer la famille $u_0, \ldots, u_m$ est de rang m (il en résulte donc $m \leqslant n$).
   (c) Prouver $\sum_{k=0}^{m} u_k = \overrightarrow{0}$ (indication : partir d'une relation de liaison entre les u_k).
6. Dans cette question, on voit comment créer une famille $u_0, \ldots, u_n$ ayant la propriété $\mathcal{P}_n$.
   (a) Indiquer comment choisir u_0, u_1, pour que la famille u_0, u_1 ait la propriété $\mathcal{P}_1$.
   (b) Indiquer comment choisir u_0, u_1, u_2 pour que la famille u_0, u_1, u_2 ait la propriété $\mathcal{P}_2$.
   (c) Soit m dans $\{2, \ldots, n\}$.
   On suppose qu'on a construit une famille $u_0, \ldots, u_{m-1}$ ayant la propriété $\mathcal{P}_{m-1}$.
   Soit F le sous-espace de E engendré par $u_0, \ldots, u_{m-1}$ (on sait que $\dim F = m - 1$).
   Soit v_m un vecteur unitaire orthogonal à F.
   Pour tout k de $\{0, \ldots, m-1\}$, on pose $v_k = -\dfrac{1}{m} v_m + \sqrt{1 - \dfrac{1}{m^2}}\, u_k$.
   Montrer que la famille $v_0, v_1, \ldots, v_m$ possède la propriété $\mathcal{P}_m$.
   (d) Conclure