Une famille de matrices orthogonales

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3).
On donne quatre réels a, b, c, k tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $k \neq 0$.
On désigne par I la matrice identité d'ordre 3 .

Soit f le morphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $T = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

Première partie

1. Calculer T^2. Exprimer T^3 en fonction de T.
2. Trouver le rang de f et déterminer son noyau.
3. Montrer que la matrice $B_k = kI + T$ est inversible.
4. Montrer qu'il existe trois réels u, v, w, dépendants de k, tels que $B_k^{-1} = uI + vT + wT^2$.
5. En déduire que les matrices $(kI + T)^{-1}$ et $kI - T$ commutent.

Deuxième partie

On note g_k l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A_k = (kI + T)^{-1}(kI - T)$ dans la base canonique.

1. Quels sont les vecteurs x de $\mathbb{R}^3$ tels que $g_k(x) = x$?
2. Montrer que A_k est inversible et que $A_k^{-1} = {}^{\mathrm{T}}A_k = A_{-k}$.
3. Montrer que $I + A_k$ est inversible et que : $T = k(I - A_k)(I + A_k)^{-1}$.
4. Ecrire explicitement la matrice A_k en fonction de I, k, T, T^2.
5. On pose $k = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$, avec -$\pi < \theta < \pi$.
   (a) On suppose d'abord $a = 1$ et $b = c = 0$.
   Identifier g_k à une transformation géométrique simple.
   (b) On suppose $(b, c) \neq (0, 0)$. Montrer que les vecteurs $u_1 = (a, b, c)$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = -f^2(e_1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Quelles sont les matrices $\widetilde{T}$ et $\widetilde{A}_k$ de f et de g_k dans cette base ?
   (d) Soient k_1 et k_2 deux réels non nuls tels que $(k_1 + k_2)(1 - k_1k_2) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe un réel non nul k tel que $g_k = g_{k_1} \mathrm{o} g_{k_2}$.
   Exprimer k en fonction de k_1 et de k_2.