Une équation polynomiale

Pour tout (a,b) de $\mathbb{C}^2$, soit l'équation $(E_{a,b})$: $P(X^2)=P(X+a)P(X+b)$, d'inconnue P dans $\mathbb{C}[X]$.

Il est clair que les seuls polynômes constants vérifiant $(E_{a,b})$ sont $P=0$ et $P=1$.

On note $S_{a,b}$ l'ensemble (éventuellement vide) des polynômes non constants vérifiant $(E_{a,b})$.

I. Étude de quelques cas particuliers

Dans cette partie, on va étudier l'équation $(E_{a,b})$ dans quelques cas particuliers.

On va notamment constater qu'il est fort possible que $S_{a,b}$ soit vide.

Le cas particulier $a=b$

Dans cette question, on suppose $a=b$. On étudie donc l'équation $(E_{a,a})$: $P(X^2)=P^2(X+a)$.

Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Soit $m \geqslant 1$ le nombre de ses racines *distinctes*.

1. (a) Préciser le nombre de racines distinctes du polynôme $Q(X)=P^2(X+a)$.
   (b) Même question avec $R(X)=P(X^2)$ (discuter selon que 0 est racine ou non de P).
2. (a) On suppose maintenant que P est dans $S_{a,a}$. Montrer que $P=X^m$.
   (b) En déduire finalement que si $a \neq 0$ alors $S_{a,a}=\emptyset$. Précisez l'ensemble $S_{0,0}$.

Le cas particulier $\{a,b\}=\{0,1\}$

On suppose ici $\{a,b\}=\{0,1\}$. On étudie donc l'équation $(E_{0,1})$: $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.

3. Soit P un élément de $S_{0,1}$, et soit α une racine de P dans $\mathbb{C}$.
   (a) En considérant α^2, montrer que nécessairement $\alpha=0$ ou $|\alpha|=1$.
   (b) Montrer de même que $\alpha=1$ ou $|\alpha-1|=1$.
   (c) Montrer finalement que les seules possibilités sont $\alpha=0$ et $\alpha=1$.
4. Déterminer l'ensemble $S_{0,1}$.

II. Quelques résultats généraux, dans le cas $S_{a,b} \neq \emptyset$

Dans cette partie, on suppose que $S_{a,b}$ est non vide.

1. (a) Montrer que tout élément de $S_{a,b}$ est unitaire.
   (b) Montrer que $S_{a,b}$ est stable par produit.
2. (a) On suppose que P et Q sont dans $S_{a,b}$, et qu'ils ont le même degré.
   On pose $D(X)=P(X)-Q(X)$ et $R(X)=P(X+a)D(X+b)+D(X+a)Q(X+b)$.
   En raisonnant sur les degrés, montrer que D est nul. Qu'en résulte-t-il ?
   (b) En déduire que $S_{a,b}$ possède un unique polynôme de degré minimum (et qu'il est unitaire).
   On l'appelle le *polynôme minimal* de l'équation $(E_{a,b})$.

III. De l'importance du polynôme minimal

Dans cette partie, on suppose que $S_{a,b}$ est non vide.

On note M le polynôme minimal de l'équation $(E_{a,b})$. On pose $\deg(M)=m \geqslant 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $S_{a,b}=\{M^n,\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

1. Dans cette question, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ fixé.

   On note $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ l'ensemble des racines $n$ièmes de l'unité.

   (a) Soient A, B dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $A^n - B^n = \prod_{k=1}^{n} (A - \omega_k B)$.

   (b) En déduire que si P est dans $\mathbb{C}[X]$ et si $P^n \in S_{a,b}$ alors $P \in S_{a,b}$.

2. Dans cette question, P désigne un élément de $S_{a,b}$, de degré $n \geqslant 1$.

   On note $\delta = m \wedge n$. Il existe donc r, s dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m = \delta r$ et $n = \delta s$, avec $r \wedge s = 1$.

   (a) Vérifier que M^s et P^r ont même degré, et en déduire qu'ils sont égaux : $M^s = P^r$.

   (b) L'égalité $M^s = P^r$ assure que M et P ont les mêmes racines distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ dans $\mathbb{C}$.

   On note $M = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $P = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ les factorisations de M et P dans $\mathbb{C}[X]$.

   i. Pour tout k de $\{1, \ldots, q\}$, montrer qu'il existe un entier γ_k tel que $\alpha_k = \gamma_k r$.

   ii. En utilisant $Q = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\gamma_k}$ et la question (III.1), montrer que $r = 1$, donc $P = M^s$.

3. Énoncer de façon précise la conclusion de cette partie du problème.

IV. Existence d'un polynôme minimal de degré 1, 2, ou 3

On étudie ici quand $S_{a,b}$ est non vide et possède un polynôme minimal de degré 1 ou 2.

Pour simplifier les calculs, on pose $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $d = \dfrac{b-a}{2}$.

1. **Existence d'un polynôme minimal de degré 1**

   (a) Montrer que si P est dans $S_{a,b}$ et de degré 1, alors nécessairement $P = X - c$.

   (b) Réciproquement, montrer que $X - c$ est dans $S_{a,b}$ si et seulement si $c = d^2$.

   (c) Montrer que si cette condition est réalisée, alors $S_{a,b} = \{(X - c)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

2. **Existence d'un polynôme minimal de degré 2**

   Dans cette question, on suppose $c \neq d^2$ (donc $S_{a,b}$ ne contient pas de polynôme de degré 1).

   On va étudier à quelle condition $S_{a,b}$ contient un polynôme de degré 2 (nécessairement unitaire).

   Posons $P = (X - c)^2 + \alpha(X - c) + \beta$, écrit suivant les puissances décroissantes de $X - c$.

   (a) Montrer qui si P est dans $S_{a,b}$, alors nécessairement $\alpha = 0$.

   (b) En déduire que P est dans $S_{a,b}$ si et seulement si $\beta = \dfrac{1}{4} - c$ et $d^2 = \dfrac{1}{4}$.

   (c) Réciproquement, on suppose que $d^2 = \dfrac{1}{4}$ (c'est-à-dire $b = a \pm 1$), et que $c \neq \dfrac{1}{4}$.

   Montrer que $S_{a,b} = \{M^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, où $M = (X - c)^2 + \dfrac{1}{4} - c$.

3. **Existence d'un polynôme minimal de degré 3**

   Dans cette question, on suppose $d^2 \neq \dfrac{1}{4}$ et $c \neq d^2$.

   D'après les questions (IV.1) et (IV.2), $S_{a,b}$ ne contient aucun polynôme de degré 1 ou 2.

   On va étudier à quelle condition $S_{a,b}$ contient un polynôme de degré 3 (nécessairement unitaire).

   Posons $P = (X - c)^3 + \alpha(X - c)^2 + \beta(X - c) + \gamma$ (puissances décroissantes de $X - c$).

   Dans un premier temps, on suppose que le polynôme P est solution de $(E_{a,b})$.

   On procédera par implications, avec des identifications (et une substitution judicieuse) dans $(E_{a,b})$.

   (a) Commencer par montrer $\alpha = 0$, puis $\gamma = 0$.

   (b) Réécrire $(E_{a,b})$ avec $\alpha = \gamma = 0$ et montrer cette fois $\beta = -\dfrac{9}{4}$.

   (c) Montrer finalement les égalités $c = \dfrac{25}{16}$ et $d = \pm\dfrac{1}{4}$.

   En déduire que $\{a, b\} = \left\{\dfrac{21}{16}, \dfrac{29}{16}\right\}$ et préciser la factorisation de P.

   (d) Conclure de façon précise cette question (3).