Trois exercices indépendants

Exercice 1. Propriétés caractéristiques de certaines sommes d'entiers

1. Rappeler pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Bigl(\sum_{k=1}^{n} k\Bigr)^2$.
2. Réciproquement, on se donne une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ de réels strictement positifs.

   On suppose que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \Bigl(\sum_{k=1}^{n} x_k\Bigr)^2$.

   Montrer que pour tout entier k on a $x_k = k$.
3. Soit p un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

   On suppose que pour $n \geqslant 1$, S_n est un carré (c'est le cas si $p = 3\ldots$)

   Montrer que l'entier p est nécessairement égal à 3.

Exercice 2. Étude d'une équation fonctionnelle dans $\mathbb{N}$

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m^2+n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$.

L'objectif de cet exercice est de prouver que les deux seules possibilités (qui par ailleurs conviennent de façon évidente) sont :

– L'application nulle, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 0$.

– L'application identité, donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

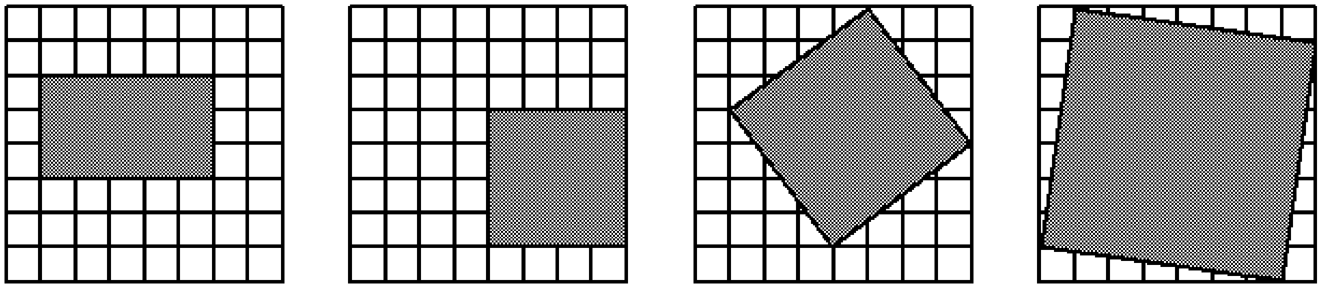
Dans la suite de l'exercice, on note a l'entier naturel $f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que pour n de $\mathbb{N}$, on a $f(n^2) = f(n)^2$.
2. Montrer alors que $a^2 = a$, donc que a est égal à 0 ou à 1.

   Pour répondre à la question posée, il suffit visiblement de prouver que l'égalité $f(n) = an$, déjà vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, est vraie pour tout entier naturel n.
3. Vérifier successivement les égalités $f(2) = 2a$, $f(4) = 4a$, et $f(5) = 5a$.
4. Utiliser les valeurs de $f(4)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(3) = 3a$.
5. Utiliser les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$ pour montrer que $f(7) = 7a$.
6. Montrer que $f(8) = 8a$, $f(9) = 9a$, $f(10) = 10a$ et $f(6) = 6a$.
7. Observer que pour tout entier m on a $\begin{cases} (2m)^2 + (m-5)^2 = (2m-4)^2 + (m+3)^2 \\ (2m+1)^2 + (m-2)^2 = (2m-1)^2 + (m+2)^2 \end{cases}$

   Montrer que pour n, on a $f(n) = an$.
8. Conclusion ?

Exercice 3. Inscrire des carrés dans un damier



La figure ci-dessus montre un damier 8×8 dans laquelle on a inscrit un rectangle puis trois carrés. (un quadrilatère est dit inscrit si ses sommets sont des points de la grille).

On va étudier combien de rectangles ou de carrés on peut inscrire dans un damier $n \times n$, avec $n \geqslant 1$. On se limite à de "vrais" carrés ou rectangles inscrits, c'est-à-dire d'aire non nulle.

On admet les résultats suivants, pour tout $n \geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. Dans un damier $n \times n$, combien peut-on inscrire de rectangles dont les cotés soient parallèles aux cotés du damier (comme sur le premier exemple ci-dessus) ?
2. On note C_n le nombre de carrés inscriptibles dans un damier $n \times n$ et de bords parallèles aux cotés du damier (comme sur le deuxième exemple ci-dessus).

   On note $C_{n,k}$ ceux de ces carrés dont l'arête est de longueur k, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

   Montrer que $C_{n,k} = (n+1-k)^2$ et en déduire la valeur de C_n.
3. Dans un damier $n \times n$, combien y-a-t'il de carrés inscriptibles dont les quatre sommets touchent les bords du damier (comme dans le quatrième exemple ci-dessus) ?
4. On note C'_n le nombre de carrés inscriptibles dans un damier $n \times n$.

   Montrer que $C'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, C_{n,k} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.

   Indication : remarquer que chacun des carrés dénombrés ici est inscrit dans un unique carré (lui-même inscrit dans le damier $n \times n$) de cotés parallèles aux bords du damier.