

## Ensembles normaux pour une application

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de même cardinal.

Soit  $f$  une application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(F)$  vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

1. Montrer l'implication :  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ .
2. En déduire :  $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

On suppose, dans la suite du problème, que  $f$  satisfait à la troisième condition :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \text{Card}(f(A)) \geq \text{Card}(A)$$

3. On dit que  $A$  est *normal* (sous-entendu pour  $f$ ) si  $\text{Card}(f(A)) = \text{Card}(A)$ .
  - (a) Montrer que  $\emptyset$  et  $E$  sont normaux.
  - (b) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont normaux,  $A \cup B$  et  $A \cap B$  sont normaux.
  - (c) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont normaux,  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .
4. Parmi tous les sous-ensembles normaux non vides de  $E$ , soit  $A_0$  de cardinal minimum.
  - (a) Soit  $A$  un sous-ensemble normal de  $E$ . Montrer que  $A \supset A_0$  ou  $A \cap A_0 = \emptyset$ .
  - (b) Soient  $\alpha$  un élément de  $A_0$  et  $\beta$  un élément de  $f(\{\alpha\})$ .

On pose  $E' = E - \{\alpha\}$  et  $F' = F - \{\beta\}$ .

On définit une application  $g$  de  $\mathcal{P}(E')$  dans  $\mathcal{P}(F')$  par :

$$\forall C \in \mathcal{P}(E'), \quad g(C) = f(C) \cap F'$$

Montrer que  $g$  vérifie les trois conditions analogues à celles de  $f$ .

Indication : pour la troisième condition, on pourra considérer une partie  $A$  de  $E'$  et discuter suivant que  $A$  est ou n'est pas normal pour  $f$ .

- (c) En déduire qu'il existe une bijection  $\varphi : E \rightarrow F$  telle que :  $\forall x \in E, \varphi(x) \in f(\{x\})$ .

Indication : procéder par récurrence sur l'entier  $n = \text{Card } E = \text{Card } F$ .