Déterminants de Hankel

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$.

Pour tous entiers n et p, on note : $M(n,p) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \dots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \dots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \dots & u_{n+2p} \end{pmatrix}$

$M(n,p)$ appartient donc à $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$.

Par exemple, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$M(n,0) = (\, u_n \,)$, $\quad M(n,1) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}$, $\quad M(n,2) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{pmatrix}$

On note $\Delta(n,p) = \det M(n,p)$.

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on note $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des suites (u_n) de $\mathbb{K}$ telles que le déterminant $\Delta(n,p)$ soit nul pour tout entier n.

L'objet de ce problème est d'étudier les suites (u_n) de $\mathcal{S}_p$.

Partie I

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $n \geqslant 2$.

On note $\operatorname{Com} A$ la comatrice de A.

1. Rappeler la valeur du produit $({}^{\mathrm{T}}\operatorname{Com} A)A$.
2. Montrer successivement que :
   (a) Si $\operatorname{rg} A = n$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = n$.
   (b) Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 1$ (utiliser des applications linéaires.)
   (c) Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors $\operatorname{rg} \operatorname{Com} A = 0$.
3. Si on note A_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice A, montrer que :
   $\det A = 0 \Rightarrow \forall (i,j,k,l) \in \{1,\dots,n\}^4, \quad A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$.

Partie II

1. Identifier $\mathcal{S}_0$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des suites géométriques.
3. On suppose qu'il existe $p+1$ scalaires non tous nuls $a_0, a_1, \dots, a_p$ tels que, pour tout entier n, $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$.
   Montrer alors que la suite (u_n) est élément de $\mathcal{S}_p$.

Partie III

Dans cette partie, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

On suppose que la suite (u_n) est un élément de $\mathcal{S}_p$. On suppose qu'il existe un entier n_0 strictement positif tel que le déterminant $\Delta(n_0, p-1)$ soit non nul.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\Delta(n+2,p-1)\Delta(n,p-1) - \Delta^2(n+1,p-1) = 0$.

2. En déduire la nature de la suite $n \to \Delta(n, p-1)$, et montrer que pour tout entier naturel n le déterminant $\Delta(n, p-1)$ est non nul.
3. Montrer que pour entier n de $\mathbb{N}$, la matrice $\operatorname{Com} M(n, p)$ est de rang 1. Montrer également que sa première et sa dernière lignes sont non identiquement nulles.
4. Montrer que pour tout k de $\{1, \ldots, n\}$, la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(k, p)$ est égale ou opposée à la première ligne de $\operatorname{Com} M(k-1, p)$.
5. En déduire que la première ligne de $\operatorname{Com} M(n, p)$ est un multiple non nul de la dernière ligne de $\operatorname{Com} M(0, p)$.
6. En développant $\Delta(n, p)$, montrer qu'il existe $p+1$ scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_p$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_p \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$.

Partie IV

1. Déterminer les suites (u_n) telles que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{vmatrix} = 0$, avec $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$.
2. Pour tous entiers n et p, calculer le déterminant

$$D(n, p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \ldots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \ldots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$