Déterminants circulants

Première partie

Pour tout λ de $\mathbb{C}$, on définit la matrice $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda^3 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det(A(\lambda)) = (1-\lambda^4)^3$.
2. Préciser le rang de la matrice $A(\lambda)$, selon les valeurs de λ.
3. Calculer $A(\lambda)^{-1}$ (quand elle existe) par la méthode du pivot.
4. Retrouver le résultat de la question (3) en utilisant la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Montrer que les vecteurs $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,1,1) \\ \varepsilon_2 = (1,i,-1,-i) \\ \varepsilon_3 = (1,-1,1,-1) \\ \varepsilon_4 = (1,-i,-1,i) \end{cases}$ forment une base de $\mathbb{C}^4$.
6. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^4$ à la base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.
   Montrer que la matrice $D(\lambda) = P^{-1}A(\lambda)P$ est diagonale.
7. Montrer que le résultat précédent permet de retrouver ceux des questions (1) et (2).

Deuxième partie

On se donne n dans $\mathbb{N}^*$, puis $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ et on pose $\omega = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$.

Soit A (resp. Ω) la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $[A]_{p,q} = a_{(q-p) \bmod n}$ (resp. $[\Omega]_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$)

Par exemple, et uniquement dans le cas $n = 5$, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \end{pmatrix} \text{ et } \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} \end{pmatrix}$$

Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

1. Soit $\overline{\Omega}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $[\,\overline{\Omega}\,]_{p,q} = \omega^{-(p-1)(q-1)}$.
   Calculer le produit $\Omega\,\overline{\Omega}$. En déduire que Ω est inversible et exprimer Ω^{-1} en fonction de $\overline{\Omega}$.
2. Par un argument très simple, retrouver que Ω est inversible, mais sans calculer Ω^{-1}.
3. Montrer que le terme général $[A\Omega]_{pq}$ de $A\Omega$ vérifie $[A\Omega]_{pq} = f(\omega^{q-1})[\Omega]_{pq}$.
4. En déduire l'égalité $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} f(\omega^k)$.
5. Dans cette question, on suppose que $a_k = \dbinom{n-1}{k}$ pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Déduire de la question précédente que $\det A = 0$ si n est pair, et $\det A = 2^{n-1}$ si n est impair.

Troisième partie

Soit $n \geqslant 2$ un entier donné. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Le terme général de J est donc $[J]_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = p{+}1 \bmod n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice J dans la base canonique $(e) = e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$.

On reprend les notations ω, A et $f(z)$ de la partie II.

Pour tout q de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, on note $\varepsilon_q = (1, \omega^q, \omega^{2q}, \ldots, \omega^{(n-1)q})$.

1. Pour $0 \leqslant k < n$ et $1 \leqslant q \leqslant n$ préciser le vecteur $f^q(e_k)$.
   En déduire que $J^n = I_n$ et que $A = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.
2. Pour tout λ de $\mathbb{C}$, résoudre le système $(S) : f(u) = \lambda u$ d'inconnue $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.
   On vérifiera que la solution générale de ce système est :
   – Uniquement la solution nulle si $\lambda^n \neq 1$.
   – La droite vectorielle engendrée par ε_q si $\lambda = \omega^q$, avec $0 \leqslant q < n$.
3. On sait que la famille $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ est une base de $\mathbb{C}^n$ (la matrice Ω de la partie II est la matrice des vecteurs ε_k dans la base canonique et on a vu que cette matrice est inversible).
   Préciser la matrice D de φ dans la base (ε).
4. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $\Delta = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k D^k$.
   Retrouver alors le résultat obtenu en (II.4).