Dérangements d'un ensemble fini

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, et on note S_n l'ensemble des *permutations* de E_n, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de E_n dans lui-même.

Pour tout f de S_n et pour tout k de E_n, on dit que k est un *point fixe* de f si $f(k) = k$.

On dit qu'un élément f de S_n est un *dérangement* de E_n si f ne possède aucun point fixe.

On note D_n le nombre de dérangements de E_n. Par convention, on pose $D_0 = 1$.

On généralise cette définition en disant qu'une bijection f d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sur un ensemble $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est un dérangement de A sur B (ainsi ordonnés) si pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a $f(a_i) = b_j$ avec $j \neq i$. Il est clair qu'il y a alors autant de dérangements de A sur B qu'il y en a de E_n dans lui-même.

1. Que valent D_1 et D_2 ?
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a : $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$.

   Indication : on cherchera à former un dérangement quelconque f de E_{n+2}, avec $n \geqslant 1$.

   Pour cela, on considèrera $k = f(n + 2)$ et on s'intéressera à $f(k)$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.
4. Dans cette question, on retrouve le résultat de (3) mais par une autre méthode.

   Pour tout entier $k \geqslant 1$, et pour tout q de $\{0, \ldots, k\}$, on note $D_{k,q}$ le nombre des permutations de E_k qui ont exactement q points fixes. Ainsi $D_{k,0} = D_k$.

   Par convention on pose encore $D_{0,0} = 1$.

   (a) Montrer que $0 \leq q \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q}\binom{n-q}{k-q}$.

   (b) En déduire que, si $0 \leq q < n$, alors $\sum\limits_{k=q}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{q} = 0$ (et si $q = n$?).

   (c) Prouver que pour tout $k \geqslant 0$, on a $k! = \sum\limits_{r=0}^{k} D_{k,r} = \sum\limits_{q=0}^{k} \binom{k}{q} D_q$.

   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $D_n = (-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$

   (e) Retrouver ainsi le résultat de la question 3.
5. On considère n boules discernables, placées initialement dans n tiroirs distincts, à raison d'une boule par tiroir. On sort les n boules, puis on les replace aléatoirement, toujours à raison d'une boule par tiroir. On note X la variable aléatoire discrète représentant le nombre de boules ayant retrouvé leur tiroir d'origine.

   (a) Montrer que $p(X = q) = \dfrac{1}{q!} \sum\limits_{k=0}^{n-q} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

   (b) Exprimer de même la probabilité de l'événement $X \geqslant 1$.

   (c) Montrer que l'espérance de X est égale à 1. On proposera deux méthodes.

   (d) Calculer la variance de X.