Déplacements entiers dans un demi-plan

On considère le demi-plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ des points à coordonnées entières, à ordonnées $\geqslant 0$.

Un robot part de $(0,0)$ et effectue des déplacements d'une unité, soit vers le haut (de (x,y) à $(x,y+1)$) soit vers la droite (de (x,y) à $(x+1,y)$) soit vers la gauche soit vers le bas.

On cherche le nombre $\varphi(n)$ de trajectoires formées de n déplacements successifs (on dira n-chemins) et qui se maintiennent dans le demi-plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

- Première méthode :

  Pour tout $k \geqslant 0$, et pour tout $n \geqslant 0$, on note $\varphi_k(n)$ le nombre de n-chemins partant d'un point quelconque d'ordonnée k et inclus dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Par convention $\varphi_k(0) = 1$.

  L'objectif de l'exercice est donc de calculer $\varphi(n) = \varphi_0(n)$.

  1. (a) Exprimer $\varphi_0(n)$ en fonction de $\varphi_0(n-1)$ et $\varphi_1(n-1)$.

     (b) Si $k \geqslant 1$, exprimer de même $\varphi_k(n)$ en fonction de $\varphi_k(n-1)$, $\varphi_{k+1}(n-1)$ et $\varphi_{k-1}(n-1)$.

     (c) Montrer que les relations obtenues déterminent les $\varphi_k(n)$ de façon unique.

     (d) Préciser les valeurs de $\varphi_0(1)$, et de $\varphi_k(n)$ pour $k \geqslant n$.

  2. Pour k dans $\mathbb{N}$ et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\psi_k(n) = \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} \dbinom{2n+1}{n-j}$.

     Montrer que les $\psi_k(n)$ satisfont aux mêmes conditions que celles caractérisant les $\varphi_k(n)$.

  3. Déduire de ce qui précède que $\varphi(n) = \dbinom{2n+1}{n}$.

- Deuxième méthode :

  Un n-chemin partant de $(0,0)$ peut être représenté par une chaîne de n caractères tous égaux à D (vers la droite), à H (vers le haut), à G (vers la gauche) ou à B (vers le bas).

  1. On transforme tout n-chemin de la manière suivante : on remplace simultanément chaque G par GD, chaque D par DG, chaque H par DD, chaque B par GG. Ensuite on préfixe la chaîne obtenue par la lettre D.

     Montrer qu'on obtient ainsi un $(2n+1)$-chemin partant de $(0,0)$ et inclus dans $\mathbb{N} \times 0$ (c'est-à-dire un $(2n+1)$-chemin partant de 0 et inclus dans $\mathbb{N}$, les seuls déplacements possibles étant G et D, le premier déplacement étant bien sûr vers la droite).

  2. Montrer que la transformation précédente est réversible, et que $\varphi(n)$ est donc égal au nombre de $(2n+1)$-chemins partant de 0 et inclus dans $\mathbb{N}$.

     Pour effectuer ce calcul, on doit retrancher du nombre de $(2n+1)$-chemins partant de 0 et *à destination finale dans* $\mathbb{N}$ le nombre de ces chemins qui passent par -1.

  3. Montrer que tout $(2n+1)$-chemin de $\mathbb{Z}$ partant de 0 et à destination finale dans $\mathbb{N}$ se termine en $2n+1-2k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Pour k fixé, montrer que leur nombre est $\dbinom{2n+1}{k}$.

  4. On considère un $(2n+1)$-chemin Γ de $\mathbb{Z}$ allant de 0 à $2n+1-2k \geqslant 0$ mais passant par -1.

     On inverse simultanément tous les déplacements de Γ de 0 jusqu'à son premier passage en -1.

     Montrer qu'on obtient ainsi un $(2n+1)$-chemin Γ' de $\mathbb{Z}$ allant de 0 à $2n+3-2k$.

     Montrer que la transformation précédente est réversible, et que le nombre de $(2n+1)$-chemins de $\mathbb{Z}$ allant de 0 à $2n+1-2k \geqslant 0$ mais passant par -1 est égal à $\dbinom{2n+1}{k-1}$.

  5. Montrer en définitive que le nombre de $(2n+1)$-chemins qui partent de 0 et qui sont inclus dans $\mathbb{N}$ est égal à $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dbinom{2n+1}{k} - \dbinom{2n+1}{k-1} \right) = \dbinom{2n+1}{n}$, et conclure.