

Une famille de matrices

Pour tout (a, b, c) de \mathbb{C}^3 , on note $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & -c & b \\ -b & a & -c \\ c & -b & a \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $E = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$.

Pour tous α, β, γ de \mathbb{C} , on note $\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, et notamment $I = \text{diag}(1, 1, 1)$.

1. (a) Pour tout n de \mathbb{N} , calculer A^n .
 (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Montrer que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
 En donner la dimension et une base.
3. (a) Pour tout λ de \mathbb{C} , calculer $(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I)$.
 (b) Montrer que si λ est dans $\{1, j, j^2\}$ alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
 (c) Montrer que si λ n'est pas dans $\{1, j, j^2\}$, alors $A - \lambda I$ est inversible.
 Exprimer alors A_λ^{-1} en fonction de I, A, A^2 .
4. Dans toute la suite du problème, on note $\Delta = \text{diag}(1, j, j^2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -j^2 & -j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.
 On pose : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \varphi(M) = P^{-1}MP$.
 (a) Prouver que P est inversible et calculer P^{-1} .
 (b) Montrer que φ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et préciser φ^{-1} .
 (c) Sans utiliser l'expression de P^{-1} , vérifier que $\varphi(A) = \Delta$. Calculer également $\varphi(A^2)$.
 (d) Pour tout (a, b, c) de \mathbb{C}^3 , montrer que :

$$\varphi(M(a, b, c)) = \text{diag}(f(a, b, c), g(a, b, c), h(a, b, c)) \text{ avec } \begin{cases} f(a, b, c) = a + b + c \\ g(a, b, c) = a + jb + j^2c \\ h(a, b, c) = a + j^2b + jc \end{cases}$$

 (e) Soit ψ la restriction de φ à E .
 Montrer que ψ est un isomorphisme de E sur la sous-algèbre \mathcal{D} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ formée des matrices diagonales.
 (f) Indiquer une condition nécessaire et suffisante (sur les coefficients a, b, c) pour qu'une matrice $M = M(a, b, c)$ de E soit inversible, et montrer qu'alors M^{-1} est dans E .
5. On reprend ici les notations et résultats de la question (4)
 (a) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec Δ .
 (b) Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec A sont les matrices de E .
6. On reprend ici les notations et résultats des questions (4) et (5)
 (a) Soit M une matrice inversible de E .
 Montrer qu'il y a exactement 8 matrices X de E telles que $X^2 = M$.
 (b) Montrer qu'il y a exactement 8 matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $X^2 = A$.