

## Déterminants de Hankel

Comme d'habitude,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$ .

Pour tous entiers  $n$  et  $p$ , on note :  $M(n, p) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n+p} & u_{n+p+1} & \cdots & u_{n+2p} \end{pmatrix}$

$M(n, p)$  appartient donc à  $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ .

Par exemple, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$M(n, 0) = (u_n), \quad M(n, 1) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{pmatrix}, \quad M(n, 2) = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{pmatrix}$$

On note  $\Delta(n, p) = \det M(n, p)$ .

Pour tout entier  $p \geq 0$ , on note  $\mathcal{S}_p$  l'ensemble des suites  $(u_n)$  de  $\mathbb{K}$  telles que le déterminant  $\Delta(n, p)$  soit nul pour tout entier  $n$ .

L'objet de ce problème est d'étudier les suites  $(u_n)$  de  $\mathcal{S}_p$ .

### Partie I

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , avec  $n \geq 2$ .

On note  $\text{Com } A$  la comatrice de  $A$ .

- Rappeler la valeur du produit  $({}^T \text{Com } A)A$ .
- Montrer successivement que :
  - Si  $\text{rg } A = n$ , alors  $\text{rg } \text{Com } A = n$ .
  - Si  $\text{rg } A = n - 1$ , alors  $\text{rg } \text{Com } A = 1$  (utiliser des applications linéaires.)
  - Si  $\text{rg } A \leq n - 2$ , alors  $\text{rg } \text{Com } A = 0$ .
- Si on note  $A_{ij}$  le cofacteur d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $A$ , montrer que :  $\det A = 0 \Rightarrow \forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, n\}^4, \quad A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk} = 0$ .

### Partie II

- Identifier  $\mathcal{S}_0$ .
- Montrer que  $\mathcal{S}_1$  est l'ensemble des suites géométriques.
- On suppose qu'il existe  $p + 1$  scalaires non tous nuls  $a_0, a_1, \dots, a_p$  tels que, pour tout entier  $n$ ,  $a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_p u_{n+p} = 0$ .  
Montrer alors que la suite  $(u_n)$  est élément de  $\mathcal{S}_p$ .

### Partie III

Dans cette partie,  $p$  est un entier fixé supérieur ou égal à 1.

On suppose que la suite  $(u_n)$  est un élément de  $\mathcal{S}_p$ . On suppose qu'il existe un entier  $n_0$  strictement positif tel que le déterminant  $\Delta(n_0, p - 1)$  soit non nul.

- Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $\Delta(n + 2, p - 1)\Delta(n, p - 1) - \Delta^2(n + 1, p - 1) = 0$ .

2. En déduire la nature de la suite  $n \rightarrow \Delta(n, p-1)$ , et montrer que pour tout entier naturel  $n$  le déterminant  $\Delta(n, p-1)$  est non nul.
3. Montrer que pour entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la matrice Com  $M(n, p)$  est de rang 1. Montrer également que sa première et sa dernière lignes sont non identiquement nulles.
4. Montrer que pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , la dernière ligne de Com  $M(k, p)$  est égale ou opposée à la première ligne de Com  $M(k-1, p)$ .
5. En déduire que la première ligne de Com  $M(n, p)$  est un multiple non nul de la dernière ligne de Com  $M(0, p)$ .
6. En développant  $\Delta(n, p)$ , montrer qu'il existe  $p+1$  scalaires  $a_0, a_1, \dots, a_p$ , avec  $a_0 \neq 0$  et  $a_p \neq 0$ , tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_p u_{n+p} = 0$ .

## Partie IV

1. Déterminer les suites  $(u_n)$  telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  : 
$$\begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{vmatrix} = 0,$$
 avec  $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 4$ .
2. Pour tous entiers  $n$  et  $p$ , calculer le déterminant

$$D(n, p) = \begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & \dots & (n+p)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (n+p+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+p)^2 & (n+p+1)^2 & \dots & (n+2p)^2 \end{vmatrix}$$