

## DM n°19

Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $A_n$  la matrice carrée d'ordre  $n$  de terme général  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi  $A_1 = (0)$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , on pose  $P_n(x) = \det(A_n + xI_n)$  pour  $n \geq 1$ .

Par convention, on pose  $P_0(x) = 1$ .

Ainsi  $P_1(x) = |x| = x$ ,  $P_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ ,  $P_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ ,  $P_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

1. Préciser les expressions de  $P_3(x)$  et de  $P_4(x)$
2. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , et tout  $n \geq 2$ , on a  $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$ .
3. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , l'application  $P_n$  est une fonction polynomiale unitaire de degré  $n$ , et qu'elle a la même parité que  $n$ .
4. On fixe dans  $\mathbb{R}$  la valeur de  $x$ , et on pose  $u_n = P_n(x)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

(a) Montrer que si  $x = 2\varepsilon$  (où  $\varepsilon = \pm 1$ )  $u_n = (n + 1)\varepsilon^n$ .

(b) Montrer que si  $x$  n'est pas dans  $\{-2, 2\}$ , alors  $u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ , en notant  $\alpha$  et  $\beta$  les racines distinctes de l'équation  $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$ .

(c) On suppose  $|x| < 2$ . Avec  $\theta = \arccos \frac{x}{2}$ , montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$ .

5. Calculer  $I_{n,m} = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} P_n(x) P_m(x) dx$ , pour tous  $n, m$  dans  $\mathbb{N}$ .

6. (a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , le polynôme  $P_n$  possède  $n$  zéros distincts, tous réels, et donnés par :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{n,k} = 2 \cos \theta_{n,k}$ , avec  $\theta_{n,k} = \frac{k\pi}{n+1}$ .

(b) Montrer alors que  $P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$ .

7. On se donne un réel  $\lambda$  et on considère le système  $(S_{n,\lambda})$  défini par

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

(a) Résoudre  $(S_{n,\lambda})$  quand  $\lambda \notin \{a_{n,1}, \dots, a_{n,n}\}$ .

(b) On suppose que  $\lambda = a_{n,k} = 2 \cos \theta_{n,k}$ .

Montrer alors que le système est de rang  $n - 1$ , et que l'ensemble des solutions est la droite engendrée par  $v_n = (\sin \theta_k, -\sin 2\theta_k, \dots, (-1)^{n-1} \sin n\theta_k)$ .