

# Table des matières

I	Applications multilinéaires alternées . . . . .	2
I.1	Applications multilinéaires . . . . .	2
I.2	Applications multilinéaires alternées . . . . .	2
II	Application “déterminant dans une base” . . . . .	4
II.1	Cas de la dimension $n=1,2,3$ . . . . .	4
II.2	Généralisation à la dimension $n$ . . . . .	5
III	Déterminant d’un endomorphisme, d’une matrice . . . . .	6
III.1	Déterminant d’un endomorphisme . . . . .	6
III.2	Déterminant d’une matrice . . . . .	6
IV	Calcul des déterminants . . . . .	8
IV.1	Notations des déterminants . . . . .	8
IV.2	Propriétés calculatoires . . . . .	8
IV.3	Développements d’un déterminant . . . . .	9
IV.4	Déterminants particuliers . . . . .	9

# I Applications multilinéaires alternées

Comme d'habitude,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I.1 Applications multilinéaires

### Définition

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n, F$  une famille de  $n + 1$  espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

Soit  $f$  une application de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  dans  $F$ .

On dit que  $f$  est *n-linéaire*, ou encore *multilinéaire*, si pour tout indice  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  et pour tout choix d'un vecteur  $u_j$  dans chaque  $E_j$  avec  $j \neq i$ , l'application de  $E_i$  dans  $F$  définie par  $u \rightarrow f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)$  est linéaire.

On note  $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, F)$  l'ensemble de ces applications.

Si  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$ , on simplifie cette notation en  $\mathcal{L}_n(E, F)$ .

### Remarques et propriétés

– Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

– Si  $f$  est *n-linéaire* et si l'un des  $u_i$  est nul, alors  $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{0}$ .

Cela résulte en effet de la linéarité par rapport à la  $i$ -ième composante

– Si  $n = 2$ , on parle d'application *bilinéaire*.

Si  $n = 3$ , on parle d'application *trilinéaire*.

Si  $F = \mathbb{K}$ , on parle de *forme n-linéaire*.

– Une application  $f$  de  $E \times F$  dans  $G$  est bilinéaire  $\Leftrightarrow$  :

$\forall(u, u') \in E^2, \forall(v, v') \in F^2, \forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$  :

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta u', \gamma v + \delta v') &= \alpha f(u, \gamma v + \delta v') + \beta f(u', \gamma v + \delta v') \\ &= \alpha \gamma f(u, v) + \alpha \delta f(u, v') + \beta \gamma f(u', v) + \beta \delta f(u', v') \end{aligned}$$

– Si  $n = 1$ , une application de  $E$  dans  $F$  est "*n-linéaire*"  $\Leftrightarrow$  elle est linéaire.

Autrement dit  $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

– En revanche, si  $n \geq 2$ , on ne confondra pas linéarité et *n-linéarité*.

Par exemple :

$$\begin{cases} \text{Si } f \text{ est linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \text{Si } f \text{ est } n\text{-linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

De même, si  $n = 2$  :

$$\begin{cases} \text{Si } f \text{ linéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v) = f(u, v') + f(u', v') \\ \text{Si } f \text{ est bilinéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v') \end{cases}$$

## I.2 Applications multilinéaires alternées

### Définition

On dit qu'une application  $n$ -linéaire  $f$  de  $E^n$  dans  $F$  est *alternée* si :

$\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , avec  $i \neq j$  :

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n).$$

Autrement dit l'échange de deux vecteurs quelconques change l'image par  $f$  en son opposée.

On note  $\mathcal{A}_n(E, F)$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires alternées de  $E^n$  dans  $F$ .

### Remarque et exemples

- Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{A}_n(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .
- Si  $n = 1$ , toute application " $n$ -linéaire" de  $E$  dans  $F$  (c'est-à-dire en fait linéaire de  $E$  dans  $F$ ) peut être considérée comme "alternée".
- Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.  
Le "produit vectoriel"  $(u, v) \rightarrow u \wedge v$  est bilinéaire alterné de  $E^2$  dans  $E$ .  
Le "produit mixte"  $(u, v, w) \rightarrow (u \wedge v) \cdot w = u \cdot (v \wedge w)$  est une forme trilinéaire alternée.

### Proposition

Soit  $f$  une application  $n$ -linéaire alternée de  $E^n$  dans  $F$ .

– Si deux des vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  sont égaux, alors  $f(u_1, \dots, u_n) = \vec{0}$ .

– On ne modifie pas l'image  $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$  en ajoutant à l'un des vecteurs  $u_i$  une combinaison linéaire des autres vecteurs  $u_j$ .

– Si les vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont liés, alors  $f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{0}$ .

### Conséquence

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie strictement inférieure à  $n$ , alors la seule application  $n$ -linéaire alternée de  $E^n$  dans  $F$  est l'application nulle.

### Rappel

Toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  peut se décomposer en une suite de transpositions (c'est-à-dire d'échanges de deux éléments).

Une telle décomposition n'est pas unique. En revanche, la parité du nombre de transpositions entrant dans la décomposition d'une permutation donnée est constante.

Si ce nombre est pair (resp. impair) on dit que  $\sigma$  est paire (resp. impaire), et sa *signature*  $\varepsilon(\sigma)$  est égale à 1 (resp.  $-1$ ).

### Proposition

Soit  $f$  une application  $n$ -linéaire alternée de  $E^n$  dans  $F$ .

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de signature  $\varepsilon(\sigma)$ .

Pour tous vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $E$ , on a :

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

## II Application “déterminant dans une base”

Dans cette section,  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  sur  $\mathbb{K}$ .

On cherche quelles sont les formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ .

### II.1 Cas de la dimension $n=1,2,3$

#### – En dimension 1

On suppose donc que  $E$  est une droite vectorielle.

Rappelons que toutes les formes 1-linéaires sur  $E$  sont considérées comme “alternées”.

La dimension de  $\mathcal{A}_1(E, K) = \mathcal{L}(E, K) = E^*$  est donc 1. Soit  $e$  un vecteur non nul de  $E$ .

Une forme linéaire sur  $E$  est définie de manière unique par l’image de  $e$ .

En particulier une seule d’entre elles vérifie  $\varphi(e) = 1$ .

Cette application est alors définie par :  $\forall x \in \mathbb{K}, \varphi(xe) = x$ .

$\varphi$  est appelée *application déterminant* dans la base  $(e)$ .

Pour toute forme linéaire  $f$  sur  $E$ ,  $f = \lambda\varphi$  avec  $\lambda = f(e)$ .

#### – En dimension 2

Soit  $E$  un plan vectoriel muni d’une base  $(e) = e_1, e_2$ .

Soit  $f$  une forme bilinéaire alternée sur  $E^2$ .

Soient  $u = x_1e_1 + y_1e_2$  et  $u_2 = x_2e_1 + y_2e_2$  deux vecteurs quelconques de  $E$ .

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2) &= f(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1x_2 \underbrace{f(e_1, e_1)}_{=0} + x_1y_2 f(e_1, e_2) + y_1x_2 \underbrace{f(e_2, e_1)}_{=-f(e_1, e_2)} + y_1y_2 \underbrace{f(e_2, e_2)}_{=0} = (x_1y_2 - y_1x_2)f(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Réciproquement, on constate que l’application  $\varphi$  définie sur  $E^2$  par :

$$\varphi(u_1, u_2) = \varphi(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - y_1x_2$$

est une forme bilinéaire alternée sur  $E^2$  et vérifie  $\varphi(e_1, e_2) = 1$ .

$\varphi$  est appelée *application déterminant* dans la base  $(e)$ .

Le calcul précédent montre que  $\mathcal{A}_2(E, K)$  est une droite vectorielle et que pour toute forme bilinéaire alternée  $f$  sur  $E^2$ , on a  $f = \lambda\varphi$  avec  $\lambda = f(e_1, e_2)$ .

On voit que  $\varphi$  est la seule forme bilinéaire alternée sur  $E^2$  telle que  $\varphi(e_1, e_2) = 1$ .

#### – En dimension 3

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 muni d’une base  $(e) = e_1, e_2, e_3$ .

Soit  $f$  une forme trilinéaire alternée sur  $E^3$ .

Soient  $u_1, u_2, u_3$  trois vecteurs de  $E$ , donnés par leurs composantes dans  $(e)$  :

$$u_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3, \quad u_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3, \quad u_3 = x_3e_1 + y_3e_2 + z_3e_3.$$

Le développement de  $f(u_1, u_2, u_3)$  s'écrit  $\sum_{i,j,k} x_i y_j z_k f(e_i, e_j, e_k)$ , où les trois indices  $i, j, k$  prennent indifféremment toutes les valeurs de 1 à 3.

L'application  $f$  étant alternée, les quantités  $f(e_i, e_j, e_k)$  sont nulles dès que deux au moins des trois indices  $i, j, k$  sont égaux.

Le développement de  $f(u_1, u_2, u_3)$  se réduit donc à :

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, u_3) &= x_1 y_2 z_3 f(e_1, e_2, e_3) + x_1 y_3 z_2 f(e_1, e_3, e_2) \\ &\quad + x_2 y_1 z_3 f(e_2, e_1, e_3) + x_2 y_3 z_1 f(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + x_3 y_1 z_2 f(e_3, e_1, e_2) + x_3 y_2 z_1 f(e_3, e_2, e_1) \end{aligned}$$

Mais  $\begin{cases} f(e_1, e_3, e_2) = f(e_2, e_1, e_3) = f(e_3, e_2, e_1) = -f(e_1, e_2, e_3) \\ f(e_2, e_3, e_1) = f(e_3, e_1, e_2) = f(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$

Finalement, on a :

$$f(u_1, u_2, u_3) = (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1) f(e_1, e_2, e_3)$$

Réciproquement, on constate que l'application  $\varphi$  définie sur  $E^3$  par :

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, u_3) &= \varphi(x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3, x_3 e_1 + y_3 e_2 + z_3 e_3) \\ &= (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1) \end{aligned}$$

est une forme trilinéaire alternée sur  $E^3$  et vérifie  $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$ .

$\varphi$  est appelée *application déterminant* dans la base  $(e)$ .

Le calcul précédent montre que  $\mathcal{A}_3(E, K)$  est une droite vectorielle et que pour toute forme trilinéaire alternée  $f$  sur  $E^3$ , on a  $f = \lambda\varphi$  avec  $\lambda = f(e_1, e_2, e_3)$ .

On voit que  $\varphi$  est la seule forme trilinéaire alternée sur  $E^3$  telle que  $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$ .

## II.2 Généralisation à la dimension $n$

### Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ .

L'application  $f \rightarrow f(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}$ .

L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E^n$  est donc une droite vectorielle.

L'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  telle  $\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$  est appelée *application déterminant dans la base  $(e)$*  et notée  $\text{Det}_{(e)}$ .

Pour toute forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  sur  $E^n$  :  $f = \lambda \text{Det}_{(e)}$ , avec  $\lambda = f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

### Remarque

Si les vecteurs  $u_j$  s'écrivent  $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ , le déterminant de  $u_1, u_2, \dots, u_n$  dans  $(e)$  s'écrit donc sous la forme d'une somme étendue à toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  :

$$\text{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

Cette forme développée (une somme de  $n!$  termes) a essentiellement un intérêt théorique. Elle n'est jamais utilisée pour le calcul pratique des déterminants, en tout cas si  $n \geq 4$ .

**Proposition** (*relation entre deux applications "déterminant"*)

Soient  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$  et  $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  deux bases de  $E$ .  
 Pour  $u_1, u_2, \dots, u_n$  dans  $E$ , on a :  
 $\text{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Det}_{(e)}(e_1, e_2, \dots, e_n) \text{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

**Proposition** (*caractérisation des bases*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ .  
 Soit  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .  
 La famille  $(u)$  est une base de  $E \Leftrightarrow \text{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq 0$ .

### III Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

#### III.1 Déterminant d'un endomorphisme

On rappelle que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

**Proposition**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ .  
 Le scalaire  $\text{Det}_{(e)}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$  ne dépend pas de la base  $(e)$ .  
 On l'appelle le *déterminant* de l'endomorphisme  $f$ , et on le note  $\det f$ .

**Propriétés immédiates**

- Par définition, le déterminant d'un endomorphisme  $f$  est donc égal au déterminant dans la base  $(e)$  des images par  $f$  des vecteurs de  $(e)$ , et ceci pour toute base de  $E$ .
- En particulier, le déterminant de l'application "identité" vaut 1.  
 En effet ce déterminant est égal à  $\text{Det}_{(e)}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , pour une base  $(e)$  quelconque.
- Pour tout endomorphisme  $f$ , tous vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , et toute base  $(e)$ , on a :  
 $\text{Det}_{(e)}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = \det f \text{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

**Proposition** (*Déterminant du composé de deux endomorphismes*)

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . Alors  $\det(g \circ f) = \det g \det f$ .

**Proposition** (*Déterminant d'un automorphisme*)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .  
 L'application  $f$  est un automorphisme  $\Leftrightarrow$  son déterminant est non nul.  
 On a alors  $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$ .

**Proposition** (*Déterminant des puissances d'un endomorphisme*)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $p$  un entier naturel. Alors  $\det(f^p) = (\det f)^p$ .  
 Ce résultat se généralise aux exposants négatifs si  $f$  est un automorphisme.

## III.2 Déterminant d'une matrice

### Définition

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .  
 On appelle déterminant de  $A$ , et on note  $\det A$ , le déterminant de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  dont la matrice est  $A$  dans la base canonique.

### Propriétés

- Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .
- Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 :  $\det I_n = 1$ .
- Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible  $\iff \det A \neq 0$ . On a alors  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .
- Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout entier naturel  $k$ , on a  $\det A^k = (\det A)^k$ .  
Si  $A$  est inversible, cette égalité s'étend au cas des entiers négatifs.
- Si les matrices carrées  $A$  et  $B$  sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

### Liens entre les différentes notions de déterminant

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .  
Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans la base  $(e)$ . Alors  $\det A = \det f$ .  
Autrement dit le déterminant d'une matrice est égal à celui de tout endomorphisme susceptible d'être représenté par cette matrice dans une certaine base.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .  
Soit  $A$  la matrice dans la base  $(e)$  d'une famille  $(u) = u_1, \dots, u_n$  de  $n$  vecteurs de  $E$ .  
Alors  $\det A = \text{Det}_{(e)}(u_1, \dots, u_n)$ .
- Soient  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  deux bases de  $E$  et soit  $P$  est la matrice de passage de  $(e)$  à  $(\varepsilon)$ .  
Alors on a l'égalité :  $\det P = \text{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ .  
Les applications "déterminant dans la base  $(e)$ " et "déterminant dans la base  $(\varepsilon)$ " sont reliées par l'égalité  $\text{Det}_{(e)} = \det P \text{Det}_{(\varepsilon)}$ .  
Ce résultat est conforme à l'égalité  $[u]_e = P[u]_\varepsilon$  qui relie les coordonnées dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  d'un vecteur de  $E$ .

### Proposition (Déterminant et transposition)

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det A = \det {}^t A$ .

### Conséquence

Toutes les propriétés des déterminants qui s'expriment en termes de colonnes peuvent également s'exprimer en termes de lignes.

## IV Calcul des déterminants

### IV.1 Notations des déterminants

#### Notation

Soit  $A$  une matrice de terme général  $(a_{ij})$ .

$$\text{Le déterminant } \Delta \text{ de } A \text{ est noté } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Plus généralement, on appellera déterminant d'ordre  $n$  tout tableau  $\Delta$  de la forme précédente, sans qu'il soit nécessaire de préciser son "origine" (matrice, famille de vecteurs, endomorphisme).

#### Déterminants d'ordre 1, 2 ou 3

– Pour tout scalaire  $a$ , on a bien sûr  $|a| = a$  (ne pas confondre avec la valeur absolue...)

– Pour tous scalaires  $a, b, c, d$  :  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

– Pour tous scalaires  $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$  :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b.$$

### IV.2 Propriétés calculatoires

Les propriétés des déterminants résultent de ce qui précède.

Soit  $\Delta$  un déterminant d'ordre  $n$ . Dans la pratique, on commet souvent l'abus de langage de confondre le "tableau"  $\Delta$  et la valeur qui lui est associée.

Les propriétés suivantes sont exprimées en termes de lignes. Elles pourraient être exprimées à l'identique en termes de colonnes.

– La valeur de  $\Delta$  est linéaire par rapport à chaque colonne.

En particulier, si on multiplie une colonne par  $\lambda$ , la valeur du déterminant est elle-même multipliée par  $\lambda$ .

Si  $\Delta$  contient une colonne nulle, alors la valeur de  $\Delta$  est nulle.

– Si on permute deux colonnes de  $\Delta$ , la valeur de  $\Delta$  est changée en son opposé.

Plus généralement, si on effectue une permutation sur les colonnes de  $\Delta$ , la valeur de  $\Delta$  est inchangée (resp. changée en son opposé) selon que cette permutation peut se décomposer en un nombre pair (resp. impair) d'échanges de colonnes.

– On ne modifie pas la valeur de  $\Delta$  en ajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes de  $\Delta$ .

– La valeur de  $\Delta$  est nulle si et seulement si ses colonnes sont liées.

### IV.3 Développements d'un déterminant

#### Définition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , avec  $n \geq 2$ , de terme général  $a_{ij}$ .

Pour tout couple d'indices  $(i, j)$ , on appelle *mineur* de  $a_{ij}$  dans  $A$  (ou dans  $\Delta$ ), le déterminant  $\Delta_{ij}$ , d'ordre  $n - 1$ , obtenu en supprimant dans  $\Delta$  la ligne et la colonne de  $a_{ij}$ .

La quantité  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  est appelée cofacteur du coefficient  $a_{ij}$ .

On appelle *comatrice* de  $A$  et on note  $\text{com } A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de terme général  $A_{ij}$ .

#### Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}, \text{ alors } \text{com } A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

#### Proposition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , avec  $n \geq 2$ , de terme général  $a_{ij}$ .

Pour tout indice  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a :  $\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ .

Cette égalité est appelée développement de  $\Delta$  par rapport à sa  $i$ -ème ligne.

Pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on a :  $\Delta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$ .

Cette égalité est appelée développement de  $\Delta$  par rapport à sa  $j$ -ème colonne.

#### Utilisation de la comatrice

– La proposition précédente peut s'écrire :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A(\text{com } A) = (\text{com } A)A = (\det A)I_n.$$

– Si la matrice  $A$  est inversible, alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com } A$ .

Cette formule n'a cependant qu'un intérêt assez théorique.

– Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible, alors  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

### IV.4 Déterminants particuliers

– *Déterminants triangulaires*

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , triangulaire (supérieure ou inférieure).

Alors  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$  (produit des coefficients diagonaux).

$$\text{Par exemple : } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = aehj.$$

## – Déterminants triangulaires par blocs

Soit  $A$  une matrice carrée triangulaire (supérieure ou inférieure) “par blocs”.

Alors le déterminant de  $A$  est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{44} \begin{vmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

## – Déterminants de Van Der Monde

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , de terme général  $a_{ij} = x_i^{j-1}$ .

Autrement dit  $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ . Alors  $\det A = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$ .

Exemple :  $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (z - y)(z - x)(z - w)(y - x)(y - w)(x - w)$