

Énoncés des exercices

Exercice 1

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

Solution :

On retranche par exemple la colonne C_3 aux colonnes C_2 et C_4 .

On peut alors développer par rapport à la ligne L_1 :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -c^2 & c^2 & b^2 - c^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 - a^2 & a^2 & -a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c^2 & b^2 - c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 \\ 1 & b^2 - a^2 & -a^2 \end{vmatrix}$$

On soustrait maintenant L_2 à L_1 et L_2 :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & -2c^2 & b^2 - a^2 - c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 \\ 0 & b^2 - a^2 - c^2 & -2a^2 \end{vmatrix} = (a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2 \\ &= (a^2 + 2ac + c^2 - b^2)(a^2 - 2ac + c^2 - b^2) \\ &= ((a + c)^2 - b^2)((a - c)^2 - b^2) \\ &= (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(a - b - c) \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Solution :

On ajoute toutes les lignes à la première et on factorise la somme (constante) obtenue.

Puis on effectue successivement $C_5 \leftarrow C_5 - C_4$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, puis on ajoute toutes les lignes à la première.

Dans le déterminant obtenu, on ajoute la première ligne à toutes les autres :

$$\Delta = 15 \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

On est arrivé à un déterminant triangulaire. Ainsi $\Delta = 15 \cdot 5^3 = 1875$.

Exercice 3

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \cos 2\theta \\ \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$

.....

Solution :

On additionne les colonnes C_1 et C_3 :

$$C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\theta \\ \cos \theta + \cos 3\theta \\ \cos 2\theta + \cos 4\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta \\ 2 \cos \theta \cos 2\theta \\ 2 \cos \theta \cos 3\theta \end{pmatrix} = 2 \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos 2\theta \\ \cos 3\theta \end{pmatrix} = (2 \cos \theta) C_2$$

Ainsi les trois colonnes du déterminant Δ sont liées. Il en découle $\Delta = 0$.

Exercice 4

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$

.....

Solution :

Notons respectivement $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$.

Avec ces notations, on a $\Delta = \det(B + C, C + A, A + B)$ (dans la base canonique de \mathbb{K}^3 .)

On développe en utilisant la trilinearité, et le fait qu'un déterminant ayant deux colonnes égales est nul.

On obtient l'égalité : $\Delta = \det(B, C, A) + \det(C, A, B) = 2 \det(A, B, C)$.

Mais $\det(A, B, C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

On reconnaît un déterminant de Van Der Monde. Ainsi : $\Delta = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$.

Exercice 5

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ puis $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

.....

Solution :

On ajoute toutes les lignes à la première puis on développe par rapport à L_1 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 16$$

Posons $\alpha = a + b + c + d$, $\beta = a + b - c - d$, $\gamma = a - b - c + d$ et $\delta = a - b + c - d$.

On constate qu'on a les égalités :

$$\Delta D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & -\gamma & -\delta \\ \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \alpha & -\beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta D$$

Puisque $D \neq 0$, on en déduit la valeur du déterminant Δ :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b - c + d)(a - b + c - d)$$

Exercice 6

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} y^2 + z^2 & yx & zx \\ xy & z^2 + x^2 & zy \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{vmatrix}$

(Ecrire D comme le carré d'un autre déterminant)

Solution :

On constate que $\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & yx & zx \\ xy & z^2 + x^2 & zy \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} = M^T M$.

Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ z & x & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$ est $-2xyz$.

On en déduit que D est égal à $4x^2y^2z^2$.

Exercice 7

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} bc + ca + ab & a^2 + b^2 + c^2 & bc + ca + ab \\ bc + ca + ab & bc + ca + ab & a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 & bc + ca + ab & bc + ca + ab \end{vmatrix}$

(Ecrire D comme le produit de deux déterminants)

Solution :

Ecrivons D comme le déterminant d'une matrice M .

On constate que $M = JK$ avec $J = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$.

Mais $\det J = \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} \{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3\} \Rightarrow \det J = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$

On en déduit par "Sarrus" : $\det J = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

De plus J et K se déduisent l'une de l'autre en échangeant les indéterminées b et c .

Le résultat précédent étant symétrique par rapport à a , b et c , on en tire $\det J = \det K$.

Finalement $D = (\det J)^2 = (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)^2$.

Exercice 8

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & w & -v \\ -y & -w & 0 & u \\ -z & v & -u & 0 \end{vmatrix}$

.....

Solution :

On développe par rapport à la première colonne :

$$D = x \begin{vmatrix} x & y & z \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & w & -v \\ v & -u & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \end{vmatrix}$$

Chacun des déterminants 3×3 qui apparaissent ici se calcule aisément :

– Le premier vaut $uvy + uwz + u^2x = u(ux + vy + wz)$.

– Le second vaut $-v^2y - vwz - uvx = -v(ux + vy + wz)$.

– Le troisième vaut $uwz + vwy + w^2z = w(ux + vy + wz)$.

Donc $D = xu(ux + vy + wz) + yv(ux + vy + wz) + wz(ux + vy + wz) = (ux + vy + wz)^2$

Exercice 9

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$

.....

Solution :

On a ajouté toutes les lignes à la première et on factorise la somme (constante) obtenue.

On effectue ensuite les opérations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (2x + a + b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (2x + a + b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & b - a \\ b & x & 0 & a - b \\ x & b & a - b & 0 \end{vmatrix}$$

On factorise par $(b - a)^2$, tout en développant par rapport à la troisième colonne :

$$D = (2x + a + b)(b - a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & x & 1 \\ b & x & -1 \end{vmatrix} = (2x + a + b)(b - a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x - a & 1 \\ b & x - b & -1 \end{vmatrix}$$

On trouve finalement : $D = (a + b + 2x)(a + b - 2x)(b - a)^2$.

Exercice 10

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

Solution :

On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - x^3L_1$.

On peut alors développer par rapport à la première colonne.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2 - x^4 & x - x^5 & 1 - x^6 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 - x^4 & x - x^5 & 1 - x^6 \\ x & 2x^2 & 3x^3 \\ -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

On factorise x dans C_1 et C_2 , puis $1 - x^2$ dans la ligne L_1

$$D = x^2 \begin{vmatrix} x - x^3 & 1 - x^4 & 1 - x^6 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ -x & -2 & -3 \end{vmatrix} = x^2(1 - x^2) \begin{vmatrix} x & 1 + x^2 & 1 + x^2 + x^4 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ -x & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - xL_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + xL_2$.

On développe ensuite par rapport à la première colonne :

$$D = x^2(1 - x^2) \begin{vmatrix} 0 & 1 - x^2 & 1 + x^2 - 2x^4 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2(x^2 - 1) & 3(x^4 - 1) \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 - x^2 & 1 + x^2 - 2x^4 \\ 2(x^2 - 1) & 3(x^4 - 1) \end{vmatrix}$$

On peut encore factoriser $x^2 - 1$ dans L_1 et L_2 , avant de conclure par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$:

$$D = x^2(x^2 - 1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 - 2x^2 \\ 2 & 3(x^2 + 1) \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 - 2x^2 \\ 0 & -x^2 + 1 \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 1)^4$$

Conclusion : $D = x^2(x^2 - 1)^4$.

Exercice 11

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$

Solution :

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ et on factorise $x = a - b - c - d$ dans L_1 .

On retranche alors C_1 à C_2, C_3, C_4 , avant de développer par rapport à la première ligne :

$$D = x \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a-b & d-b & c-b \\ c & d-c & -a-c & b-c \\ d & c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ d-c & -a-c & b-c \\ c-d & b-d & -a-d \end{vmatrix}$$

On ajoute L_1 à L_2 et à L_3 , et on factorise $y = a + b + c - d$ et $z = a + b - c + d$:

$$D = -x \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ -a-b-c+d & -a-b-c+d & 0 \\ -a-b+c-d & 0 & -a-b+c-d \end{vmatrix} = -xyz \begin{vmatrix} -a-b & d-b & c-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On retranche enfin $C_2 + C_3$ à C_1 , ce qui permet de conclure en notant $t = a - b + c + d$:

$$D = -xyz \begin{vmatrix} -a+b-c-d & d-b & c-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xyz t$$

Conclusion : $D = (a - b - c - d)(a - b + c + d)(a + b - c - d)(a + b + c - d)$.

Exercice 12

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix}$

(Si $D = \det A$, considérer le produit $A^T A$)

Solution :

On note $s = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et on constate que :

$$A^T A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & t & -z \\ z & -t & x & y \\ t & z & -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

En prenant les déterminants, on trouve donc $\det^2 A = D^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^4$.

Or, relativement à la variable x , D est une fonction polynômiale de degré 4 dont le terme dominant est x^4 (obtenu par le produit des coefficients diagonaux.)

On en déduit que $D = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$.

Exercice 13

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ (Indication : Van Der Monde)

Solution :

On pose $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$ $\Delta(x)$ est un déterminant de Van Der Monde, et c'est en même temps une fonction polynômiale de degré 4 en la variable x .
Si on développe $\Delta(x)$ suivant L_5 , on voit que D est l'opposé du coefficient de x^3 dans $\Delta(x)$.

Or $\Delta(x) = \lambda(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, avec $\lambda = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

On en déduit $\Delta(x) = \lambda(x^4 - (a+b+c+d)x^3 + \dots)$ puis, en identifiant les termes de degré 3 :

$$D = \lambda(a+b+c+d) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

Exercice 14

Calculer $D = \begin{vmatrix} \|a\|^2 & a \cdot b & a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot a & \|b\|^2 & b \cdot c & b \cdot d \\ c \cdot a & c \cdot b & \|c\|^2 & c \cdot d \\ d \cdot a & d \cdot b & d \cdot c & \|d\|^2 \end{vmatrix}$, où a, b, c, d sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Solution :

Les quatre vecteurs a, b, c, d étant dans un espace de dimension 3, ils sont liés.

Ainsi il existe quatre scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non tous nuls, tels que : $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = \vec{0}$. Notons C_1, C_2, C_3, C_4 les quatre colonnes du déterminant D .

$$\text{On constate que } \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 + \delta C_4 = \begin{pmatrix} a \cdot (\alpha a) \\ b \cdot (\alpha a) \\ c \cdot (\alpha a) \\ d \cdot (\alpha a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\beta b) \\ b \cdot (\beta b) \\ c \cdot (\beta b) \\ d \cdot (\beta b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\gamma c) \\ b \cdot (\gamma c) \\ c \cdot (\gamma c) \\ d \cdot (\gamma c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cdot (\delta d) \\ b \cdot (\delta d) \\ c \cdot (\delta d) \\ d \cdot (\delta d) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 + \delta C_4 = \begin{pmatrix} a \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ b \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ c \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \\ d \cdot (\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les quatre colonnes du déterminant D sont donc liées. On en déduit $D = 0$.

Exercice 15

On reprend l'exercice précédent en supposant que a, b, c, d sont des vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Montrer que si a, b, c, d sont liés alors $D = 0$, et que dans le cas contraire $D > 0$.

Solution :

Si a, b, c, d sont liés, on montre que D est nul comme dans l'exercice précédent.

On suppose donc que les vecteurs a, b, c, d sont libres.

Soit P la matrice de la famille des vecteurs a, b, c, d exprimés dans la base canonique.

Cette matrice est inversible (donc $\det P \neq 0$) car a, b, c, d sont libres.

$$\text{Pour tous } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}, \text{ on a } (x \ y \ z \ t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz' + tt' = u \cdot v.$$

$$\text{Cette remarque montre qu'on a l'égalité matricielle } {}^T P P = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & a \cdot b & a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot a & \|b\|^2 & b \cdot c & b \cdot d \\ c \cdot a & c \cdot b & \|c\|^2 & c \cdot d \\ d \cdot a & d \cdot b & d \cdot c & \|d\|^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit } D = \begin{vmatrix} \|a\|^2 & a \cdot b & a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot a & \|b\|^2 & b \cdot c & b \cdot d \\ c \cdot a & c \cdot b & \|c\|^2 & c \cdot d \\ d \cdot a & d \cdot b & d \cdot c & \|d\|^2 \end{vmatrix} = \det({}^T P P) = (\det P)^2 > 0.$$

Exercice 16

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2 - n + 1 & n^2 - n + 2 & \dots & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

Solution :

On constate que la ligne L_i s'écrit $n(i - 1)(1, 1, \dots, 1) + (1, 2, \dots, n)$.

Ainsi L_1, L_2, \dots, L_n sont dans le plan engendré par $U = (1, 1, \dots, 1)$ et $V = (1, 2, \dots, n)$.

$$\text{On en déduit que } D_n \text{ est nul dès que } n \geq 3. \text{ Il reste } D_1 = |1| = 1 \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Exercice 17

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix}$

Solution :

Notons $\sigma = ab + bc + ca$.

On développe D par rapport à sa première ligne, en factorisant les différences de carrés :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2 \begin{vmatrix} (a+c)^2 & c^2 \\ c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} a^2 & c^2 \\ b^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} a^2 & (a+c)^2 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b)^2((\sigma + c^2)^2 - c^4) - a^2((\sigma - bc)^2 - (bc)^2) + b^2((ac)^2 - (\sigma - ac)^2) \\ &= \sigma((a+b)^2(\sigma + 2c^2) - a^2(\sigma - 2bc) - b^2(\sigma - 2ac)) \\ &= \sigma(2ab\sigma + 2c^2(a+b)^2 + 2abc(a+b)) = 2\sigma(ab\sigma + c(a+b)\sigma) = 2\sigma^3 \end{aligned}$$

Conclusion : $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2 & b^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ b^2 & c^2 & (b+c)^2 \end{vmatrix} = 2(ab + bc + ca)^3$

Exercice 18

Calculer $D(m, p) = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \dots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix}$ (d'ordre $p + 1$, avec $m \geq p$)

Solution :

Numérotons les lignes de L_0 à L_p , et les colonnes de C_0 à C_p .

On effectue successivement, de $i = p$ à $i = 1$ (donc dans l'ordre décroissant des numéros de lignes) les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$.

Après ces opérations :

– Pour tout i de $\{1, \dots, p\}$, $\binom{m+i}{0} = \binom{m+i-1}{0} = 1$.

Le terme d'indice $(i, 1)$ du nouveau déterminant est donc nul.

– Soient i et j deux indices quelconques de $\{1, \dots, p\}$.

Le terme d'indice (i, j) du nouveau déterminant est $\binom{m+i}{j} - \binom{m+i-1}{j} = \binom{m+i-1}{j-1}$, c'est-à-dire le terme d'indice $(i - 1, j - 1)$ de l'ancien déterminant.

On en déduit qu'après ces opérations, et en développant suivant C_1 :

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \dots & \binom{m}{p} \\ 0 & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p-1} \\ 0 & \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{m+p-1}{0} & \binom{m+p-1}{1} & \dots & \binom{m+p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \dots & \binom{m}{p-1} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m+p-1}{0} & \binom{m+p-1}{1} & \dots & \binom{m+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

Autrement dit : $D_{m,p} = D_{m,p-1}$.

Par une récurrence évidente, il vient $D_{m,p} = D_{m,1} = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1$

Conclusion : pour tous indices m, p le déterminant $D_{m,p}$ est égal à 1.

Exercice 19

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$

Solution :

Posons $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x^2 \\ 9x^2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} x^4 \\ 5x^4 \\ 25x^4 \end{pmatrix}$.

L'idée est de chercher A_5 comme combinaison linéaire de A_1, A_2, A_3, A_4 .

Compte tenu des degrés, on est amené à chercher des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (ne dépendant pas de x) tels que $A_5 = \alpha x^4 A_1 + \beta x^3 A_2 + \gamma x^2 A_3 + \delta x A_4$.

Cela équivaut au système $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = 5 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma + 16\delta = 25 \end{cases}$ dont une solution est $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 2 \end{cases}$

On en déduit que $x^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2x^3 \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 2x \begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4 \\ 5x^4 \\ 25x^4 \end{pmatrix}$

On applique donc d'abord l'opération $C_5 \leftarrow C_5 - x^4 C_1 + 2x^3 C_2 - 2x C_4$

De la même manière que précédemment, on peut exprimer A_4 en fonction de A_1, A_2, A_3 .

On constate alors que $\begin{pmatrix} x^3 \\ 4x^3 \\ 16x^3 \end{pmatrix} = x^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3x^2 \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} + 3x \begin{pmatrix} x^2 \\ 3x^2 \\ 9x^2 \end{pmatrix}$

On applique donc ensuite l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - x^3 C_1 + 3x^2 C_2 - 3x C_3$

Après ces deux opérations, $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 0 & 0 \\ 1 & y & y^2 & A & B \\ 1 & 2y & 3y^2 & C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 4x & 9x^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$,

Avec :

$$- A = y^3 - x^3 + 3x^2 y - 3xy^2 = (y - x)^3.$$

$$- B = y^4 - x^4 + 2x^3 y - 2xy^3 = (x + y)(y - x)^3.$$

$$- C = 4y^3 - x^3 + 3x^2(6y) - 3x(3y^2) = 4y^3 - x^3 + 6x^2 y - 9xy^2 = (4y - x)(y - x)^2$$

$$- D = 5y^4 - x^4 + 2x^3(2y) - 2x(4y^3) = 5y^4 - x^4 + 4x^3 y - 8xy^3 = (y - x)^2(5y^2 + 2xy - x^2)$$

On en déduit :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = (y - x)^5 \begin{vmatrix} 1 & x + y \\ 4y - x & 5y^2 + 2xy - x^2 \end{vmatrix} = (y - x)^5 (y^2 - xy) = y(y - x)^6$$

$$\text{De même : } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 4x & 9x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 3x & 8x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

On trouve finalement $D = 2x^3y(y-x)^6$.

Exercice 20

Soit a un réel. On note $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$

1. Calculer $\det A$ sous forme factorisée.
2. Déterminer le rang de la matrice A .
3. Résoudre le système $AX = B$.

Solution :

1. On fait $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ puis on factorise $a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$ dans L_1 .
On effectue ensuite $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$, puis $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

$$\det A = (a+1)(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{vmatrix} = (a+1)(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a(a-1) & a(2-a) & 2(1-a) \\ 2 & 2(a-1) & a(a-2) & a(1-a) \\ 2a & 2(1-a) & a-2 & a(a-1) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à L_1 , tout en effectuant les factorisations suivant les colonnes :

$$\det A = (a+1)(a+2)(a-1)^2(a-2) \begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 2 & a & -a \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Pour calculer le déterminant 3×3 final, on ajoute L_3 à L_2 et on développe suivant L_2 .

$$\begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 2 & a & -a \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -a & -2 \\ 0 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} a & -2 \\ -2 & a \end{vmatrix} = (a+1)(a-2)(a+2)$$

On en déduit finalement : $\det A = (a+1)^2(a+2)^2(a-1)^2(a-2)^2$.

2. – Si $a \notin \{-2, -1, 1, 2\}$, $\det A$ est non nul : la matrice A est alors de rang 4.
– Si $a = 1$, alors $L_2 = L_1$ et $L_4 = L_1$: la matrice A est de rang 2.
– Si $a = -1$, alors $L_2 = -L_1$ et $L_4 = -L_1$: la matrice A est de rang 2.
– Si $a = 2$, $L_4 = L_1$ et $L_3 = L_2$, donc $\text{rg } A = 2$.
– Si $a = -2$, $L_4 = -L_1$ et $L_3 = -L_2$, donc $\text{rg } A = 2$.
3. La troisième colonne de A est égale à la colonne B des seconds membres.

Il s'ensuit que $X = (0, 0, 1, 0)$ est une solution de $AX = B$.

- Si a n'appartient pas à $\{-2, -1, 1, 2\}$, le système $AX = B$ est "de Cramer" et on vient donc de trouver son unique solution.

- Dans les quatre cas particuliers, le système n'est pas de Cramer mais on sait maintenant qu'il a au moins une solution.

Il en admet donc une infinité, obtenues en résolvant le sous-système des deux premières équations (car L_3, L_4 sont combinaisons linéaires de L_1, L_2 .)

- Supposons par exemple $a = 1$ (les trois autres cas se traitent de manière analogue.)

$$\text{Le système } AX = B \text{ s'écrit } \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 2 \\ x + y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 2y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Il se réduit à } \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 2 \\ 2x + 2y + z + t = 1 \end{cases} \text{ et équivaut à } \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 1 \end{cases}$$

La solution générale est alors le plan affine défini par :

$$(x, y, z, t) = (x, -x, 1 - t, t) = (0, 0, 1, 0) + x(1, -1, 0, 0) - t(0, 0, 1, -1)$$

On reconnaît la solution particulière $(0, 0, 1, 0)$ et on voit apparaître une base de $\ker A$, formée des vecteurs $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$.

Exercice 21

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

Solution :

On retranche C_4 à C_1 , puis C_3 à C_4 , puis C_2 à C_3 et enfin C_1 à C_2 .

Dans le résultat, on effectue l'opération $L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2$ puis on développe par rapport à la dernière colonne :

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 19 & 8 & 6 \\ 5 & 11 & 3 & 36 & 6 \\ 10 & 20 & -13 & 6 & 39 \\ 10 & 24 & 21 & 12 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 13 & 19 & 8 & 6 \\ 5 & 11 & 3 & 36 & 6 \\ 10 & 20 & -13 & 6 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 \\ 5 & 13 & 19 & 8 \\ 5 & 11 & 3 & 36 \\ 10 & 20 & -13 & 6 \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, puis on développe par rapport à la première colonne.

On termine par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

$$D = 5 \begin{vmatrix} 5 & 11 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & -2 & -17 & -2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \\ -2 & -17 & -2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 100$$

Exercice 22

$$\text{Calculer le déterminant } D_n = \begin{vmatrix} p+q & p & \dots & p \\ q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p \\ q & \dots & q & p+q \end{vmatrix} \text{ (d'ordre } n \text{)}$$

Solution :

De $j = n$ à $j = 2$ (dans l'ordre décroissant des numéros de colonne) on soustrait C_{j-1} à C_j .

De $i = n$ à $i = 2$ (dans l'ordre décroissant des numéros de ligne) on soustrait alors L_{i-1} à L_i .

On obtient ainsi une nouvelle expression de D_n .

On développe cette nouvelle expression de D_n par rapport à sa dernière ligne :

$$D_n = \begin{vmatrix} p+q & -q & 0 & \dots & 0 \\ q & p & -q & \ddots & \vdots \\ q & 0 & p & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -q \\ q & 0 & \dots & 0 & p \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}q(-q)^{n-1} + pD_{n-1} = q^n + pD_{n-1}$$

On en déduit, par une récurrence évidente (en terminant par $D_1 = q + p$) :

$$\begin{aligned} D_n &= q^n + p(q^{n-1} + pD_{n-2}) = q^n + pq^{n-1} + p^2D_{n-2} \\ &= q^n + pq^{n-1} + \dots + p^kq^{n-k} + \dots + p^{n-1}D_1 = \sum_{k=0}^n p^kq^{n-k} \end{aligned}$$

- Si $p = q$, ce résultat se simplifie en $D_n = (n + 1)p^n$.

- Si $p \neq q$, on peut écrire $D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$.

Exercice 23

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$

Solution :

Notons $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique de \mathbb{K}^n , et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

On constate que $D_n = \det(a_1e_1 + b, a_2e_2 + b, \dots, a_n e_n + b)$.

Si on développe ce déterminant en utilisant la n -linéarité, tous les déterminants où apparaissent au moins deux fois le vecteur b sont nuls.

Ce développement se réduit donc à :

$$\begin{aligned} D_n &= \det(a_1e_1, a_2e_2, \dots, a_n e_n) + \sum_{j=1}^n \det(a_1e_1, \dots, a_{j-1}e_{j-1}, b, a_{j+1}e_{j+1}, \dots, a_n e_n) \\ &= \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i \neq j} a_i \right) \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i \neq j} a_i \right) \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b_j e_j, e_{j+1}, \dots, e_n) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j \left(\prod_{i \neq j} a_i \right) \end{aligned}$$

Pour prendre un exemple, si $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$, on trouve :

$$D_n = n! \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{j} \right) = n! \left(1 + b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \dots + \frac{b_n}{n} \right)$$

Exercice 24

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & : \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Solution :

Pour i allant de 2 à $n + 1$ (dans cet ordre), on effectue $C_i \leftarrow C_i + C_{i-1}$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & : \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & : \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & \ddots & : \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & \ddots & : \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire. Donc $D_{n+1} = (-1)^n(n+1) \prod_{k=1}^n a_k$.

Autre méthode : on ajoute toutes les colonnes à la première et on développe ensuite par rapport à l'unique coefficient non nul de C_1 (on tombe alors sur un déterminant triangulaire.)

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & : \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & : \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \ddots & : \\ 0 & -a_3 & a_3 & \ddots & : \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 25

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$

Solution :

On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ puis on factorise $x + s = x + a_1 + \dots + a_n$ dans C_1 .

On retranche ensuite $a_1 C_1$ à C_2 , $a_2 C_1$ à C_3 , ..., $a_n C_1$ à C_{n+1} :

$$D = (x + s) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ 1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix} = (x + s) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & x - a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_{n-1} & x - a_n \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire. Conclusion : $D_{n+1}(x) = \left(x + \sum_{k=1}^n a_k\right) \prod_{k=1}^n (x - a_k)$

Exercice 26

$$\text{Calculer le déterminant } D_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}. \text{ Généraliser.}$$

Solution :

On développe D_6 par rapport à L_1 , puis les deux déterminants obtenus par rapport à L_5 :

$$D_6 = a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Autrement dit $D_6 = (a^2 - b^2)D_4$.

De la même manière que précédemment :

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & b & a \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)D_2$$

Puisque $D_2 = a^2 - b^2$, on trouve $D_6 = (a^2 - b^2)^3$.

La généralisation est facile car la même méthode donne $D_{2n} = (a^2 - b^2)D_{2(n-1)}$.

On en déduit, pour tout $n \geq 1$, $D_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.

On peut également considérer des déterminants d'ordre impair.

$$\text{Par exemple } D_5 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)D_4 = (a+b)(a^2 - b^2)^2.$$

Plus généralement, et pour tout entier n : $D_{2n+1} = (a+b)D_{2n} = (a+b)(a^2 - b^2)^n$.

Exercice 27

$$\text{Calculer le déterminant d'ordre } n : D_n = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$$

Solution :

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \dots + L_n$, puis on factorise $x + (n-1)a$ dans L_1 .

Ensuite on retranche aL_1 à toutes les autres lignes :

$$D_n = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a \\ a & \dots & \dots & a & x \end{vmatrix} = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

Le déterminant final est triangulaire.

Conclusion : $D_n = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Exercice 28

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$

.....

Solution :

Notons $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique de \mathbb{K}^n , et $u = (1, 1, \dots, 1)$.

D_n s'écrit $D_n = \det_{(e)}((x_1 - a)e_1 + au, (x_2 - a)e_2 + au, \dots, (x_n - a)e_n + au)$.

Avec la n -linéarité, le développement de D_n se réduit à la somme suivante (tous les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à au) :

$$\begin{aligned} D_n &= \det((x_1 - a)e_1, \dots, (x_n - a)e_n) \\ &+ a \sum_{j=1}^n \det((x_1 - a)e_1, \dots, (x_{j-1} - a)e_{j-1}, u, (x_{j+1} - a)e_{j+1}, \dots, (x_n - a)e_n) \\ &= \prod_{k=1}^n (x_k - a) + a \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x_k - a) \det(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Mais $u = \sum_{i=1}^n e_i \Rightarrow \det(e_1, \dots, e_{j-1}, u, e_{j+1}, \dots, e_n) = \det(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n) = 1$.

Ainsi $D_n = \prod_{k=1}^n (x_k - a) + a \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x_k - a)$.

Si on note $P_n(t) = \prod_{k=1}^n (x_k - t)$, alors $P'_n(t) = - \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (x_k - t)$.

On en déduit une expression plus simple du résultat : $D_n = P_n(a) - aP'_n(a)$.

Remarque : si tous les x_k sont égaux à x , on a $P_n(t) = (x - t)^n$ et $P'_n(t) = -n(x - t)^{n-1}$.

On en déduit $D_n = P_n(a) - aP'_n(a) = (x - a)^n + an(x - a)^{n-1} = (x - a)^{n-1}(x + (n - 1)a)$ et on retrouve ainsi le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 29

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$

.....

(Ajouter t à chaque coefficient. Considérer la fonction $D_n(t)$ ainsi obtenue et vérifier qu'elle est affine par rapport à t . Utiliser ensuite deux valeurs particulières de t)

.....

Solution :

– On note C_1, C_2, \dots, C_n les vecteurs-colonnes de D_n . On note $U = (1, 1, \dots, 1)$.

Avec ces notations et l'indication de l'énoncé : $\Delta_n(t) = \det(C_1 + tU, C_2 + tU, \dots, C_n + tU)$.

Avec la n -linéarité, le développement de $\Delta_n(t)$ se réduit à la somme suivante (les autres déterminants sont nuls car ils ont au moins deux colonnes identiques à tU) :

$$\Delta_n(t) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + t \sum_{j=1}^n \det(C_1, \dots, C_{j-1}, U, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

$\Delta_n(t)$ est donc bien une fonction affine $\alpha + \beta t$ de la variable t , dans laquelle le terme constant α représente la valeur du déterminant initial D_n . Ainsi $D_n = \Delta_n(0)$.

– On pose $t = -a$:

$$\Delta_n(t) \text{ est triangulaire inférieur, et } \Delta_n(-a) = D_n - a\beta = \prod_{k=1}^n (x_k - a).$$

– On pose $t = -b$:

$$\text{Alors } \Delta_n(-b) = D_n - b\beta = \prod_{k=1}^n (x_k - b) \text{ (déterminant triangulaire supérieur.)}$$

Puisque $a \neq b$, on en déduit :

$$D_n = \frac{b\Delta_n(-a) - a\Delta_n(-b)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \left(b \prod_{k=1}^n (x_k - a) - a \prod_{k=1}^n (x_k - b) \right)$$

– On va maintenant retrouver le résultat de l'exercice 25 (même énoncé, mais avec $a = b$.)

En effet, D_n est une fonction polynômiale par rapport à a et b .

En particulier, la valeur de D_n pour $b = a$ s'obtient par passage à la limite quand $b \rightarrow a$.

$$\text{Si on note } P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x_k - a), \text{ on a } D_n = \frac{bP_n(a) - aP_n(b)}{b - a} = P_n(a) - a \frac{P_n(b) - P_n(a)}{b - a}.$$

$$\text{Si on fait tendre } b \text{ vers } a, \text{ alors } \frac{P_n(b) - P_n(a)}{b - a} \text{ tend vers } P'_n(a).$$

La valeur de D_n quand $b = a$ est donc $P_n(a) - aP'_n(a)$: c'est le résultat de l'exercice 28.

Exercice 30

$$\text{Calculer le déterminant } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

Solution :

On effectue successivement les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, de $j = n$ à $j = 2$ (donc dans l'ordre décroissant des numéros de colonne). On obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & \dots & b_n - b_{n-1} & a_n - b_n \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n (a_j - b_j)$$

Exercice 31

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} \binom{n+1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n+2}{2} & \binom{n+2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \binom{n+p-1}{1} & 1 \\ \binom{n+p}{p} & \binom{n+p}{p-1} & \dots & \binom{n+p}{2} & \binom{n+p}{1} \end{vmatrix}$

Solution :

1. Remarque : Si $n = 0$, on retrouve le déterminant $D_p = 1$ de l'exercice précédent. On peut donc supposer $n \geq 1$. On considère un indice i compris entre 1 et $p - 1$.

On peut représenter ainsi les lignes L_i et L_{i+1} de D_p^n :

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} L_i & \binom{n+i}{i} & \binom{n+i}{i-1} & \dots & \binom{n+i}{j} & \dots & \binom{n+i}{1} & \binom{n+i}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & \binom{n+i+1}{i+1} & \binom{n+i+1}{i} & \dots & \binom{n+i+1}{j+1} & \dots & \binom{n+i+1}{2} & \binom{n+i+1}{1} & \binom{n+i+1}{0} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Compte tenu des égalités $\binom{n+i+1}{j+1} - \binom{n+i}{j} = \binom{n+i}{j+1}$, la ligne $L_{i+1} - L_i$ s'écrit :

$$\left(L_{i+1} - L_i \mid \binom{n+i}{i+1} \quad \binom{n+i}{i} \quad \dots \quad \binom{n+i}{j+1} \quad \dots \quad \binom{n+i}{2} \quad \binom{n+i}{1} \quad \binom{n+i}{0} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)$$

On reconnaît la ligne d'indice $i + 1$ du déterminant D_p^{n-1} .

Si on effectue successivement les opérations $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p - 1$ à $i = 1$ (selon les indices décroissants) on transforme donc D_p^n en un déterminant ayant les mêmes lignes d'indice 2 à p que le déterminant D_p^{n-1} .

La seule différence se situe au niveau des lignes L_1 . Or la première ligne $(n + 1, 1, 0, \dots)$ de D_p^n est la somme de la première ligne $(n, 1, 0, \dots, 0)$ de D_p^{n-1} et de la ligne $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

On décompose ainsi L_1 puis on utilise la linéarité par rapport à cette ligne.

Il apparaît deux déterminants d'ordre p :

- Le premier est D_p^{n-1}
- Le second peut être développé par rapport à première ligne $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

Il apparaît alors le déterminant D_{p-1}^n .

On en déduit la relation $D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n$.

2. Cette relation permet d'envisager une récurrence sur la valeur s de la somme $n + p$.

La formule $D_p^n = \binom{n+p-1}{n}$ est vraie si $s = 1$, car la seule possibilité est alors $p = 1, n = 0$ et on a bien $D_1^0 = \left| \binom{1}{1} \right| = 1$.

Supposons la formule $D_q^m = \binom{m+q-1}{m}$ vraie pour les couples (q, m) tels que $q + m = s - 1$.

Soit alors un couple (p, n) tel que $p + n = s$.

Alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux couples $(p, n - 1)$ et $(p - 1, n)$:

$$D_p^n = D_p^{n-1} + D_{p-1}^n = \binom{n+p-2}{n-1} + \binom{n+p-2}{n} = \binom{n+p-1}{n}$$

ce qui démontre la formule au rang s .

Conclusion : pour tout couple (p, n) , avec $p \geq 1$ et $n \geq 0$, on a : $D_p^n = \binom{n+p-1}{n}$.

Exercice 32

$$\text{Calculer le déterminant } D_p = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \binom{p-1}{1} & 1 \\ \binom{p}{p} & \binom{p}{p-1} & \dots & \binom{p}{2} & \binom{p}{1} \end{vmatrix}$$

Solution :

On considère un indice i compris entre 1 et $p - 1$.

On peut représenter ainsi les lignes L_i et L_{i+1} de D_p :

$$\left(\begin{array}{c|cccccccc} L_i & \binom{i}{i} & \binom{i}{i-1} & \dots & \binom{i}{j} & \dots & \binom{i}{1} & \binom{i}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_{i+1} & \binom{i+1}{i+1} & \binom{i+1}{i} & \dots & \binom{i+1}{j+1} & \dots & \binom{i+1}{2} & \binom{i+1}{1} & \binom{i+1}{0} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Compte tenu des égalités $\binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j} = \binom{i}{j+1}$, la ligne $L_{i+1} - L_i$ s'écrit :

$$\left(L_{i+1} - L_i \mid 0 \quad \binom{i}{i} \quad \dots \quad \binom{i}{j+1} \quad \dots \quad \binom{i}{2} \quad \binom{i}{1} \quad \binom{i}{0} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)$$

On effectue alors successivement $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - L_i$ de $i = p - 1$ à $i = 1$ selon les indices décroissants de ligne. On obtient un déterminant que l'on peut développer par rapport à sa première colonne. On reconnaît alors D_{p-1} :

$$D_p = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \dots & \binom{p-2}{1} & 1 \\ 0 & \binom{p-1}{p-1} & \binom{p-1}{p-2} & \dots & \binom{p-1}{2} & \binom{p-1}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \binom{2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \binom{p-2}{1} & 1 \\ \binom{p-1}{p-1} & \binom{p-1}{p-2} & \dots & \binom{p-1}{2} & \binom{p-1}{1} \end{vmatrix}$$

Autrement dit $D_p = D_{p-1}$.

Par une récurrence évidente, on trouve alors $D_p = D_1 = 1$.

Exercice 33

$$\text{Calculer le déterminant } D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1^2 - x & a_1 a_2 & \dots & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 - x & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_n \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 - x & \dots & a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n a_{n-1} & a_n^2 - x \end{vmatrix}$$

Solution :

On note $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Soit $(e) = e_1, \dots, e_n$ la base canonique de \mathbb{K}^n .

Alors $D_n(x)$ est le déterminant dans (e) de la famille des vecteurs $v_j = a_j u - x e_j$.

On développe $D_n(x) = \det(a_1 u - x e_1, \dots, a_j u - x e_j, \dots, a_n u - x e_n)$ en utilisant le caractère n -linéaire alterné des applications déterminants.

Dans chaque composante $a_j u - x e_j$, on “choisit” donc soit $a_j u$ soit $x e_j$.

Mais on choisit $a_j u$ qu’une fois au plus, sans quoi le déterminant obtenu est nul.

Ainsi $D_n(x) = \det(-x e_1, \dots, -x e_n) + \sum_{j=1}^n \det(-x e_1, \dots, -x e_{j-1}, a_j u, -x e_{j+1}, \dots, -x e_n)$.

Le premier déterminant vaut $(-x)^n \det(e_1, \dots, e_n) = (-x)^n$.

Celui qui figure dans la somme vaut $(-x)^{n-1} a_j \det(e_1, \dots, e_{j-1}, \sum_{k=1}^n a_k e_k, e_{j+1}, \dots, e_n)$.

Là encore, les propriétés des déterminants font que cette expression se réduit à $(-x)^{n-1} a_j^2$.

Conclusion : $D_n(x) = (-x)^n + (-x)^{n-1} \sum_{j=1}^n a_j^2 = (-x)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 - x \right)$.

Exercice 34

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (d’ordre $n \geq 3$)

Solution :

Le résultat est immédiat en développant par rapport à la première colonne, car on aboutit à deux déterminants triangulaires d’ordre $n - 1$. Plus précisément :

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} + (-1)^{n+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1}$$

Donc $D = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 35

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

Solution :

On retranche la dernière colonne à toutes les autres. Le déterminant obtenu est triangulaire :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 & n & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & n & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \dots & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 0 & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

Exercice 36

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} P(x) & P(x+1) & \dots & P(x+n) \\ P(x+1) & P(x+2) & \dots & P(x+n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x+n) & P(x+n+1) & \dots & P(x+2n) \end{vmatrix},$

où P est un polynôme de degré strictement inférieur à n .

Solution :

Soit m un entier naturel tel que $\deg P \leq m < n$ (par exemple $m = \deg P$ si $P \neq 0$.)

Les polynômes $x \mapsto P(x), x \mapsto P(x+1), \dots, x \mapsto P(x+n)$ sont de même degré que P .

Il sont dans $\mathbb{R}_m[X]$, qui est de dimension $m+1 \leq n$.

On en déduit que ces $n+1$ polynômes sont liés.

Il existe donc $n+1$ scalaires non tous nuls tels que $\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x+j) = 0$.

Mais cette égalité permet aussi d'écrire : $\forall x \in \mathbb{K}, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x+i+j) = 0$.

Si on note C_0, C_1, \dots, C_n les $n+1$ colonnes de D , on a donc : $\sum_{j=0}^n \lambda_j C_j = 0$.

Ainsi les colonnes de D sont liées. Il en découle $D = 0$.

Exercice 37

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Solution :

On additionne toutes les lignes à la première, et on factorise la somme constante $\frac{n(n+1)}{2}$.

On retranche ensuite C_2 à C_1 , puis C_3 à C_2, \dots , et enfin C_n à C_{n-1} .

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & 2 & 1 & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n & n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne.

Dans le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu, on ajoute toutes les lignes à la première.

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-n & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On ajoute enfin la première ligne à toutes les autres.

Le déterminant obtenu est triangulaire :

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -n & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0-n \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} n^{n-2} = \frac{n+1}{2} (-n)^{n-1}$$

Exercice 38

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$

Solution :

On ajoute la ligne L_1 à toutes les autres lignes :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercice 39

Montrer qu'un déterminant antisymétrique d'ordre impair est nul.

Solution :

Pour toute matrice carrée A , on a $\det A = \det({}^T A)$.

Si A est antisymétrique d'ordre n , cela devient $\det A = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

En particulier, si n est impair, on trouve $\det A = -\det A$, c'est-à-dire $\det A = 0$.

Exercice 40

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ -1 & -2 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$

Solution :

On factorise j dans C_j , pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

On en déduit alors l'égalité $D_n = n! \Delta_n$, avec $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

– Si n est impair :

Dans ce cas Δ_n est un déterminant antisymétrique d'ordre impair.

On en déduit $\Delta_n = 0$ donc $D_n = 0$ (voir exercice précédent.)

– Si n est pair :

On ajoute la dernière ligne à la première, et la première colonne à la dernière :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & -1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne, puis par rapport à la dernière colonne.

On constate alors que $\Delta_n = \Delta_{n-2}$. Ainsi $\Delta_n = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

– Conclusion : si n est impair, $D_n = 0$. Si n est pair, $D_n = n!$

Exercice 41

Calculer le déterminant $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solution :

On retranche C_{n-1} à C_n , puis C_{n-2} à C_{n-1} , ..., et enfin C_1 à C_2 .

On ajoute ensuite la dernière ligne à toutes les autres.

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ n & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n+1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & -2 & \ddots & \vdots \\ 2n-1 & -2 & \dots & -2 & 0 \\ n & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On en déduit $D_{n+1} = n(-1)^n 2^{n-1}$.

Exercice 42

Calculer $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_0 & \cos 2\theta_0 & \dots & \cos n\theta_0 \\ 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos n\theta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos n\theta_n \end{vmatrix}$ (Indication : Van Der Monde)

Solution :

Pour tout m de \mathbb{N}^* et tout θ de \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} \cos m\theta &= \operatorname{Re} (\cos \theta + i \sin \theta)^m = \sum_{k=0}^{m/2} \binom{m}{2k} \cos^{m-2k} \theta (-1)^k \sin^{2k} \theta \\ &= \sum_{k=0}^{m/2} \binom{m}{2k} \cos^{m-2k} \theta (\cos^2 \theta - 1)^k \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un polynôme P_m , de degré m , tel que $\cos m\theta = P_m(\cos \theta)$.

Le coefficient dominant du polynôme P_m est $\sum_{k=0}^{m/2} \binom{m}{2k} = 2^{m-1}$.

Ainsi on peut écrire $\cos m\theta = 2^{m-1}(\cos \theta)^m + Q_m(\cos \theta)$, avec $\deg Q_m \leq m - 1$.

Notons C_0, C_1, \dots, C_n les colonnes successives du déterminant D_{n+1} .

Ainsi, pour tout m de $\{0, \dots, n\}$, $C_m = \begin{pmatrix} \cos m\theta_0 \\ \cos m\theta_1 \\ \vdots \\ \cos m\theta_n \end{pmatrix}$. De même, notons $C'_m = \begin{pmatrix} \cos^m \theta_0 \\ \cos^m \theta_1 \\ \vdots \\ \cos^m \theta_n \end{pmatrix}$.

On note que $C_0 = C'_0$, que $C_1 = C'_1$ et $C_2 = 2C'_2 + C'_0$ (car $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta + 1$.)

Plus généralement, ce qui précède montre que C_m s'écrit $C_m = 2^{m-1}C'_m + C''_m$, où C''_m est une combinaison linéaire des colonnes C'_j , avec $j < m$.

Ainsi, en utilisant la n -linéarité et le fait qu'on ne modifie pas la valeur d'un déterminant en retranchant d'une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \det(C_0, C_1, C_2, \dots, C_m, \dots, C_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2 + C'_0, 2^2C'_3 + C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3 + C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m + C''_m, \dots, 2^{n-1}C'_n + C''_n) \\ &= \dots \\ &= \det(C'_0, C'_1, 2C'_2, 2^2C'_3, \dots, 2^{m-1}C'_m, \dots, 2^{n-1}C'_n) \end{aligned}$$

Ainsi $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \det(C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_m, \dots, C'_n)$.

Mais $\Delta_{n+1} = \det(C'_0, C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_m, \dots, C'_n)$ est un déterminant de Van Der Monde.

La valeur de Δ_{n+1} est $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i)$.

On en déduit : $D_{n+1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i)$.

Exercice 43

Calculer le déterminant $\Delta_n(\theta)$ de $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec : $\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{i-1, j} = a_{i+1, j} = \cos \theta \\ a_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$

Solution :

On développe $\Delta_n(\theta)$ par rapport à sa première ligne $L_1 = (2, \cos \theta, 0, \dots, 0)$.

On en déduit $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos \theta D_{n-1}(\theta)$,

où $D_{n-1}(\theta)$ est un déterminant d'ordre $n - 1$.

On développe $D_{n-1}(\theta)$ par rapport à sa première colonne $C_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On constate que $D_{n-1}(\theta) = \cos \theta \Delta_{n-2}(\theta)$.

Finalement, on a la relation $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2 \theta \Delta_{n-2}(\theta)$, pour tout $n \geq 3$.

On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $t^2 - 2t + \cos^2 \theta = 0$.

Le discriminant (réduit) de cette équation est $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$.

– Dans un premier temps, on suppose $\sin \theta \neq 0$.

L'équation caractéristique possède alors les deux solutions distinctes $\begin{cases} t_1 = 1 + \sin \theta \\ t_2 = 1 - \sin \theta \end{cases}$.

Il existe donc (α, β) dans \mathbb{R}^2 tel que :

$$\forall n \geq 1, \Delta_n(\theta) = \alpha(1 + \sin \theta)^n + \beta(1 - \sin \theta)^n$$

On a $\Delta_1(\theta) = 2$ et $\Delta_2(\theta) = \begin{vmatrix} 2 & \cos \theta \\ \cos \theta & 2 \end{vmatrix} = 4 - \cos^2 \theta$.

On complète la relation $\Delta_n(\theta) = 2\Delta_{n-1}(\theta) - \cos^2 \theta \Delta_{n-2}(\theta)$ pour $n = 2$ en posant $\Delta_0(\theta) = 1$.

Les valeurs $\begin{cases} \Delta_0(\theta) = 1 \\ \Delta_1(\theta) = 2 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha(1 + \sin \theta) + \beta(1 - \sin \theta) = 2 \end{cases}$

On en déduit : $\alpha = \frac{1 + \sin \theta}{2 \sin \theta}$ et $\beta = \frac{\sin \theta - 1}{2 \sin \theta}$.

Finalement, on trouve (et avec la condition $\sin \theta \neq 0$) :

$$\forall n \geq 1, \Delta_n(\theta) = \frac{(1 + \sin \theta)^{n+1} - (1 - \sin \theta)^{n+1}}{2 \sin \theta}$$

– On suppose maintenant $\sin \theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = k\pi$, donc $\cos \theta = (-1)^k$.

Il est clair que $\Delta_n(\theta)$ est une fonction continue par rapport à θ (en effet un déterminant est une fonction polynômiale donc continue de ses coefficients.)

Pour $\sin \theta \neq 0$, on sait que $\Delta_n(\theta) = \varphi(\sin \theta)$, avec $\varphi(x) = \frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{2x}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}(1 + (n+1)x + o(x) - 1 + (n+1)x + o(x)) = n + 1 + o(1)$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = n + 1$.

On en déduit, pour tout k de \mathbb{Z} : $\Delta_n(k\pi) = n + 1$.

Exercice 44

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux étant nuls, et les autres valant ± 1 .

On suppose que n est pair. Montrer que A est inversible.

Solution :

Puisque A est à coefficients dans \mathbb{Z} , $\det A$ est un entier relatif.

On va prouver que $\det A$ est impair, ce qui assurera $\det A \neq 0$ donc A inversible.

Soit $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$ le développement de $\det A$ par rapport à la ligne L_i .

Chaque cofacteur A_{ij} est un entier relatif.

Pour chaque coefficient non diagonal a_{ij} , les entiers A_{ij} et $a_{ij}A_{ij}$ ont même parité.

On peut donc remplacer les coefficients non diagonaux de $\det A$ par 1 sans changer sa parité.

Ainsi $\det A$ a la même parité que le déterminant Δ_n de terme général $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$

Pour calculer Δ_n , on ajoute toutes les lignes à la première et on factorise $n - 1$.

On retranche alors la première colonne de toutes les autres :

$$\Delta_n = (n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n - 1)(-1)^{n-1}$$

Puisque n est impair, on voit que Δ_n donc $\det A$ sont impairs.

Ainsi $\det A \neq 0$: la matrice A est donc inversible.

Exercice 45

Soient A et B deux matrices de types respectifs (n, p) et (p, n) , avec $n \neq p$.

Montrer que l'un au moins des déterminants $\det(AB)$ ou $\det(BA)$ est nul.

Solution :

Il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, de matrice A dans les bases canoniques.

Il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, de matrice B dans les bases canoniques.

Ainsi $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

De même $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de \mathbb{K}^p .

Par l'absurde, supposons $\det(AB) \neq 0$ et $\det(BA) \neq 0$.

Il en découle que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des isomorphismes.

L'injectivité de $g \circ f$ implique celle de f , et la surjectivité de $f \circ g$ implique celle de g .

Ainsi $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme : c'est absurde car les dimensions n, p sont distinctes.

Conclusion : l'une au moins de deux matrices AB et BA a un déterminant nul.

Remarque : On peut faire un raisonnement direct et supposer $n < p$ par exemple.

Alors il est certain que la matrice BA (qui est d'ordre p) n'est pas inversible.

Elle a en effet même rang que $g \circ f$. Or $\dim \text{Im}(g \circ f) = \dim g(\text{Im } f) \leq \dim \text{Im } f \leq n < p$.

La matrice BA , d'ordre p et de rang $n < p$, est donc non inversible.

Exercice 46

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

.....

Solution :

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on ajoute C_{n+j} à C_j . On obtient $D_{2n} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$.

Pour i allant de 1 à n , on ajoute alors L_{n+i} à L_i . On obtient alors $D_{2n} = \begin{vmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$.

Le déterminant obtenu est triangulaire à diagonale unité. Donc $D_{2n} = 1$.

Exercice 47

Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $D_{2n} = \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |\det(A + iB)|^2$.

.....

Solution :

Pour k dans $\{1, \dots, n\}$, on effectue $C_k \leftarrow C_k + iC_{n+k}$. On en déduit $D_{2n} = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{vmatrix}$.

Pour tout indice de ligne k compris entre 1 et n , on effectue alors $L_{n+k} \leftarrow L_{n+k} - iL_k$.

On en déduit $D_{2n} = \begin{vmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{vmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB)$.

Mais les coefficients des matrices $A + iB$ et $A - iB$ sont conjugués deux à deux.

Il en est donc de même de leurs déterminants. On en déduit : $D_{2n} = |\det(A + iB)|^2$.

Exercice 48

Soit A une matrice carrée d'ordre n , nilpotente. Montrer que $\det(I + A) = 1$.

.....

Solution :

On sait qu'il existe P inversible telle que $T = P^{-1}AP$ soit strictement triangulaire supérieure.

On a alors $A + I = PTP^{-1} + I = P(T + I)P^{-1}$ et donc $\det A = \det(T + I)$.

Or $I + T$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

Le déterminant de $I + T$, et donc celui de A , sont donc égaux à 1.

Exercice 49

Soient A, B, C trois matrices carrées d'ordre n .

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de A et de B .

.....

Solution :

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, on échange L_i et L_{n+i} . On trouve : $D_{2n} = (-1)^n \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$.

Ce dernier déterminant, triangulaire supérieur par blocs, vaut $\det A \det B$.

Conclusion : $D_{2n} = (-1)^n \det A \det B$.

Exercice 50

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A^{-1} existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.

.....

Solution :

– Supposons que A soit inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et soit B son inverse.

Alors $AB = I_n \Rightarrow \det A \det B = 1$.

Or $\det A$ et $\det B$ sont dans \mathbb{Z} . Donc $\det A = \pm 1$

– Réciproquement supposons $\det A = \varepsilon = \pm 1$.

Alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^T \text{Com } A = \pm {}^T \text{Com } A$.

Mais $\text{Com } A$ est à coefficients dans \mathbb{Z} .

On en déduit que A est inversible dans \mathbb{Z} .

Exercice 51

Soient (x_1, x_2, \dots, x_n) , et (y_1, y_2, \dots, y_n) deux suites de n réels.

Calculer le déterminant d'ordre n de terme général $1 + x_i y_j$.

Exercice 52

Soit A une matrice carrée d'ordre n , de terme général a_{ij} .

On suppose que pour tous i, j , $0 \leq a_{ij} \leq 1$ et $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$. Montrer que $|\det(A)| \leq 1$.

Exercice 53

Quel rapport y-a-t-il entre deux déterminants :

1. Symétriques l'une de l'autre par rapport à la deuxième bissectrice ?
2. Se déduisant l'un de l'autre par rotation de 90° ?

Exercice 54

Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, et $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(I_q - BA) = \det(I_p - AB)$.