Introduction à la géométrie discrète

Oscar Figueiredo
CPE Lyon, 43 Bd du 11 novembre1918 BP 2077 69616 Villeurbanne Cedex
oscar@cpe.fr

1 Introduction

Avec le développement de l'imagerie informatique et son utilisation dans des contextes de plus en plus diversifiés, la géométrie discrète a connu un regain d'intérêt important ces dernières années. Ce domaine des mathématiques vise à étudier des objets discrets, c'est-à-dire composés d'un ensemble dénombrable de points par opposition aux objets de la géométrie euclidienne qui, eux, sont généralement composés d'un ensemble infini de points.

A part leur nom, les objets discrets ont souvent peu de propriétés communes avec leurs homologues continus. En effet les résultats les plus élémentaires de la géométrie euclidienne ne sont pas vérifiés dans les espaces discrets: des notions fondamentales telles que la continuité sont un peu bousculées (que veut dire continu dans un espace où tout est a priori discontinu ?), la définition même des objets devient compliquée (comment définir, de façon canonique, un segment de droite dans un espace discret ?). La géométrie discrète tente de répondre à ces questions en développant des théorèmes et des méthodes spécifiques à ce type d'espaces et d'objets et en tentant de transposer à ce contexte les notions familières de la géométrie euclidienne.

La géométrie discrète regroupe en fait sous un même terme un ensemble d'approches théoriques assez variées: topologie discrète, géométrie arithmétique, théorie des graphes et combinatoire, ... Parmi ces approches, la géométrie arithmétique essaie de lier les propriétés des objets géométriques discrets à celles des nombres entiers. Elle s'en trouve particulièrement adaptée aux implémentations informatiques. D'importants résultats concernant les droites, plans et surfaces discrets, les transformations quasi-affines, les rotations discrètes obtenus ces dernières années ont fait grandir l'intérêt pour cette approche. Dans la suite de ce document sont présentés quelques résultats fondamentaux sur les droites et plans discrets.

2 Droites discrètes

Le résultat le plus fondamental de la géométrie arithmétique est la définition de la droite discrète proposée par Reveillès[REV91]. Cette définition constitue une avancée majeure en proposant une reformulation remarquablement simple et riche des définitions précédentes.

On appelle droite discrète, un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ décrit par une équation diophantienne[1] de la forme:

$$D(a,b,\gamma,\rho) = \left\{(x\,,\,y)\in\mathbb{Z}^2 / \gamma \leqslant ax+by < \gamma+\rho\right\} \qquad (1)$$

où tous les paramètres sont des entiers. (a,b) définit l'orientation de la droite, γ définit son décalage affine et ρ son épaisseur arithmétique.

1 Dont les solutions ne sont que des entiers.

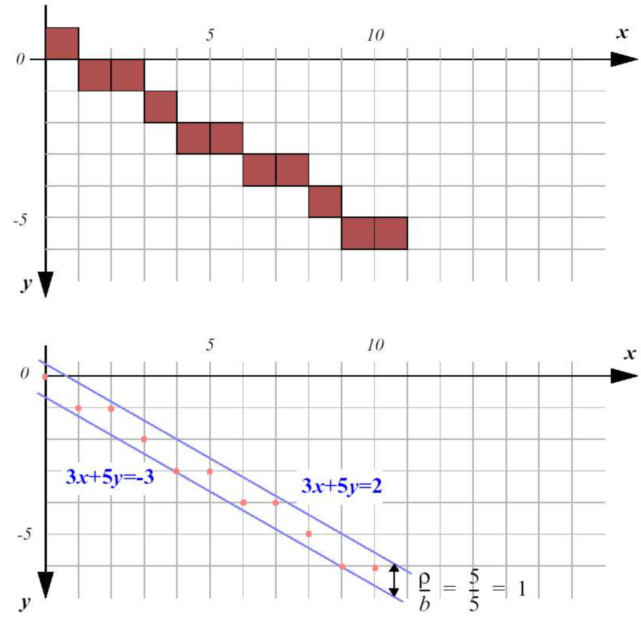

Figure 1: La droite discrète

Une droite discrète peut être vue, soit comme un ensemble de pixels ou bien comme un ensemble de points entiers compris entre deux droites euclidiennes. La Figure 1 représente une droite selon ces deux points de vue.

2.1 Droites discrètes naïves

Un sous-ensemble remarquable des droites discrètes est constitué de celles vérifiant $\gamma=\max(|a|, |b|)$:

$$D(a,b,\gamma) = \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 / \gamma \leqslant ax+by < \gamma+\max(|a|,|b|)\right\} \qquad (2)$$

Ces droites sont dites *naïves*. Elles ont exactement la même structure que celle tracées par l'algorithme classique de Bresenham[BRE65]. Leur propriété la plus importante est d'être strictement 8-connexes[2].

Les droites naïves sont aussi « fonctionnelles » selon l'un des axes principaux, c'est-à-dire que l'ensemble des points de la droite peut être décrit sous la forme *y=f(x)* ou bien *x=f(y)*. Ainsi si $0<a<b$, (2) peut s'écrire:

$$y(x) = -\left[\frac{ax-\gamma}{b}\right] \qquad (3)$$

où $[u/v]$ désigne le quotient de la division entière de u par v. Une autre approche permettant de comprendre ce résultat consiste à remarquer que la hauteur de la « bande » de plan définie par (2) dans le cas où $0<a<b$, est exactement 1, ce qui garantit que pour toute abscisse x, il existe un et un seul point d'ordonnée entière compris dans cette bande (voir Figure 1). Naturellement ce résultat demeure valable dans le cas $0<b<a$, il suffit d'appliquer une simple symétrie pour le démontrer.

2.2 Tracé de droites naïves

On peut dériver de l'équation (3) une formulation récurrente très pratique pour tracer un segment de droite de façon incrémentale. Pour simplifier la démonstration, on se place dans le cas où $0<a<b$. Les autres cas peuvent être traités de façon similaire.

De l'équation (3) on tire:

---

2 En 8-connexité, on considère comme voisins d'un pixel les 8 pixels qui lui sont adjacents par un côté ou un coin. Une droite naïve est strictement 8-connexe car le fait de lui retirer un pixel quelconque crée un « trou ».

$$y(x+1)=-\left[\frac{ax-\gamma}{b}+\frac{a}{b}\right] \qquad (4)$$

Si l'on désigne par $\{a/b\}$ le reste de la division euclidienne de a par b, comme $0<a<b$, $[a/b]=0$ et $\{a/b\}=a$. En utilisant alors l'identité

$$\left[\frac{u\ +\epsilon}{v}\right]=\left[\frac{u}{v}\right]+\left[\frac{\epsilon}{v}\right]+\left[\frac{\left\{\frac{u}{v}\right\}+\left\{\frac{\epsilon}{v}\right\}}{v}\right] \qquad (5)$$

on trouve

$$y(x+1)=y(x)-\left[\frac{r\ \ (x)+a}{b}\right] \qquad (6)$$

où $r\ \ (x)=\left\{\frac{ax-\gamma}{b}\right\}$. Notons que $0\leqslant r\ \ (x)<b$ et que donc $\left[\frac{r\ \ (x)+a}{b}\right]$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

Par un calcul similaire on démontre que

$$r\ \ (x+1)=r\ \ (x)+a\ \ -b\ \left[\frac{r\ \ (x)+a}{b}\right] \qquad (7)$$

On aboutit alors à l'algorithme suivant permettant de tracer un segment entre xmin et ymin.

```
y = - DIV(a*xmin-gamma,b)              DIV: division entière
r = REM(a*xmin-gamma,b)                REM: reste de la division entière
POUR x variant de xmin à xmax inclus
    AfficherPoint(x,y)
    r+a → r
    SI r ≥ b ALORS
        r-b → r
        y-1 → y
    FINSI
FINPOUR
```

Figure 2: Pseudo-code de tracé de droite discrète naïve

Cette algorithme dérivé en droite ligne de la définition fondamentale (2) est équivalent en complexité à l'algorithme de Bresenham. Il n'est donc pas « nouveau » mais l'existence d'une expression analytique générale permettant de définir les droites discrètes tel que (1) est d'un intérêt considérable. Ainsi plusieurs propriétés remarquables peuvent en être tirées:

- la structure d'une droite discrète de direction (a,b) avec $0<a<b$ et pgcd$(a,b)=1$ est décrite par la suite $\left\{\frac{ai}{b}\right\}_{0\leqslant i<b}$. La structure d'une telle droite est donc b-périodique et cette suite modulaire décrit la longueur des plateaux (segments horizontaux) de la droite et leur séquence.
- deux droites discrètes de même direction et de même épaisseur arithmétique sont équivalentes, c'est-à-dire identiques à translation près
- deux droites discrètes ayant les mêmes limites sont homologues, c'est-à-dire que l'une est l'image de l'autre par une transformation linéaire unimodulaire (équivalente à séquence de cisaillements)
- l'épaisseur arithmétique ρ contrôle la connectivité de la droite (voir Figure 3):
    - $\rho<\max(|a\ \ |,|b\ \ |)$: la droite n'est pas connexe
    - $\rho=\max(|a\ \ |,|b\ \ |)$: la droite est strictement 8-connexe (naïve)

- $\rho = |a| + |b|$: la droite est 4-connexe
- $\rho > |a| + |b|$: la droite est épaisse

Droite non connexe

$0 \leq 3x - 5y < 3$

Droite naïve, 8-connexe

$0 \leq 3x - 5y < 5$

Droite 4-connexe

$0 \leq 3x - 5y < 8$

Droite épaisse

$0 \leq 3x - 5y < 17$

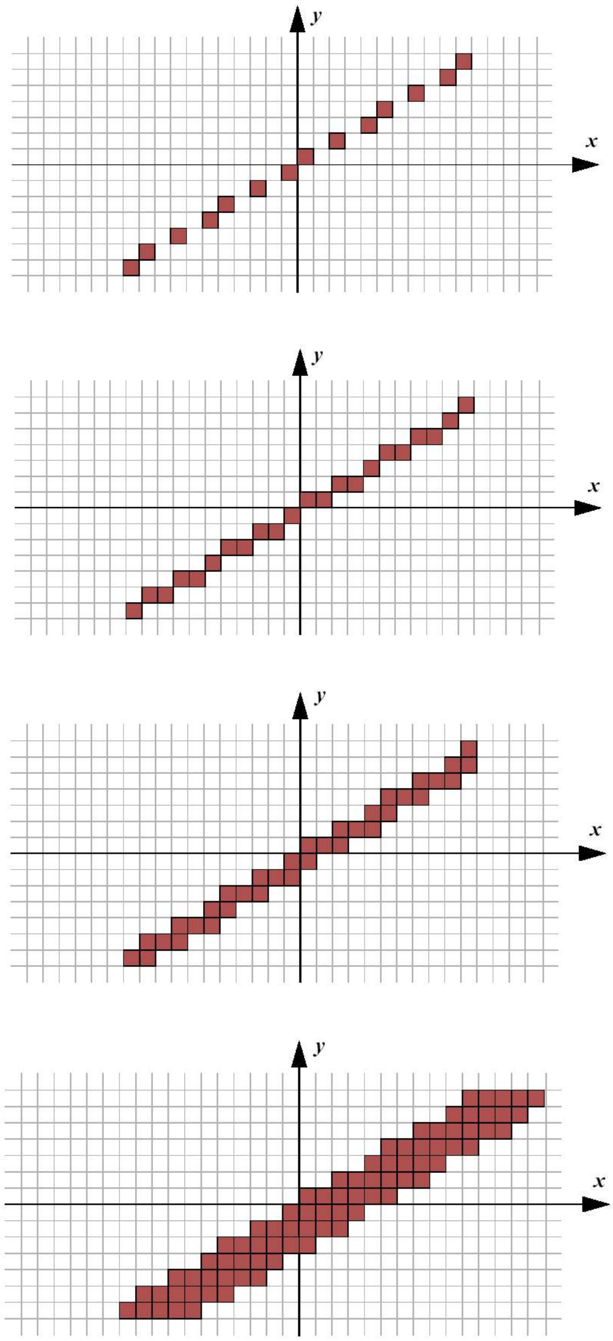

Figure 3: Connexité et épaisseur arithmétique

L'épaisseur arithmétique ρ est liée à la hauteur verticale et à la largeur de la bande de plan euclidien encadrant la droite. La hauteur verticale est en effet ρ/b tandis que la largeur est donnée par $\frac{\rho}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

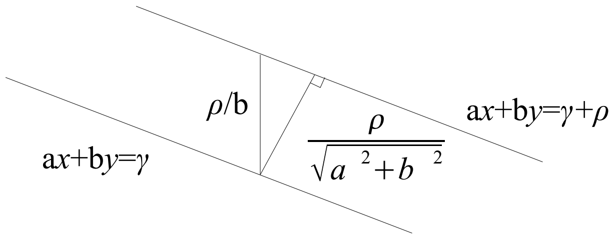

Figure 4: Largeur, hauteur et épaisseur arithmétique

3 Plans discrets

Un autre aspect très intéressant de l'équation (1) est qu'elle se généralise très simplement pour décrire des plans discrets. C'est pourquoi ces derniers partagent d'importantes propriétés avec les droites.

On appelle *plan discret* un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^3$ décrit par une équation diophantienne de la forme suivante:

$$P(a,b,c,\gamma,\rho) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 / \gamma \leqslant ax+by+cz < \gamma+\rho\} \qquad (8)$$

$(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ définit la normale au plan, $\gamma \in \mathbb{Z}$ définit son décalage affine tandis que $\rho \in \mathbb{Z}$ définit son épaisseur arithmétique.

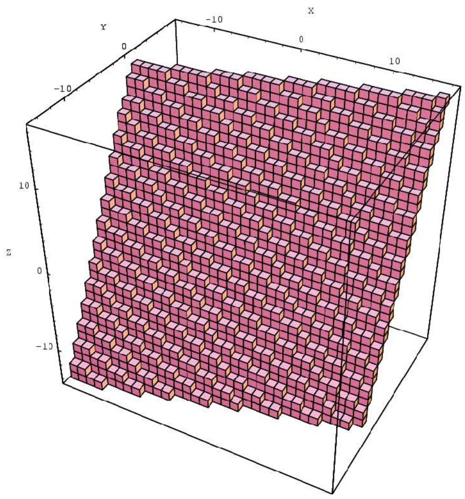

Figure 5: Un plan discret naïf

3.1 Plans discrets naïfs

Tout comme pour les droites discrètes, il existe un sous-ensemble de plans discrets remarquables vérifiant $\rho = \max(|a|,|b|,|c|)$:

$$P(a,b,c,\gamma,\rho) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 / \gamma \leqslant ax+by+cz < \gamma+\max(|a|,|b|,|c|)\} \qquad (9)$$

et qui sont appelés *plans naïfs*.

Ces plans sont 18-connexes et n'ont pas de trou pour la 6 connexité. Une des propriétés les plus importantes de ces plans discrets est qu'ils sont « fonctionnels » selon celui des trois axes principaux qui correspond à la composante la plus grande de la normale (en valeur absolue). Ainsi, si *c* est cette composante, alors pour toute paire (*x*,*y*) il existe une et une seule valeur de *z* telle que (*x*,*y*,*z*) appartienne au plan. On peut donc exprimer *z* comme une fonction de (*x*,*y*) :

$$z(x,y) = -\left\lfloor \frac{ax+by-\gamma}{c} \right\rfloor \qquad (10)$$

$P(a,b,c,\mu)$ est la discrétisation par troncature du plan euclidien d'équation $ax+by+cz=\mu$ ou x, y et z sont des réels et a, b et μ sont des entiers. $P(a,b,c,\mu)$ représente également la discrétisation par arrondi à l'entier le plus proche du plan euclidien d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ où $\alpha=a/c$, $\beta=b/c$, $\delta=d/c$ et $\mu=\delta-\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$.

3.2 Algorithme de tracé de plans discrets

Un algorithme de tracé de plans discrets naïfs peut-être dérivé de l'équation (9) de façon tout à fait similaire à celui du tracé de droites discrètes naïves.

```
zy = -DIV(a*xmin+b*ymin-gamma,c)       Division entière
ry = REM(a*xmin+b*ymin-gamma,c)        Reste de la division entière
POUR y variant de ymin à ymax FAIRE
  zy → z
  ry → r
  POUR x variant de xmin à xmax
    AfficherPoint(x,y,z)
    r+a → r
    SI r>=c ALORS
      r-c → r
      z-1 → z
    FINSI
  FINPOUR x
  ry+b → r
  SI ry>=c ALORS
    ry-c → ry
    zy-1 → zy
  FINSI
FINPOUR y
```

Figure 6: Algorithme de tracé de plan naïf

A nouveau cet algorithme est équivalent en complexité aux algorithmes classiques mais l'intérêt de la définition réside dans sa portée plus générale qu'un simple algorithme de tracé. Par exemple, le paramètre d'épaisseur ρ contrôle, comme dans le cas des droites la connexité du plan. Ainsi

- si $\rho<\max(|a|,|b|,|c|)$, le plan a des 6-trous[3]
- si $\rho=\max(|a|,|b|,|c|)$, le plan est strictement 18-connexe et n'a pas de 6-trous
- si $\rho=|a|+|b|+|c|$, le plan est 6-connexe
- si $\rho>|a|+|b|+|c|$, le plan est dit *épais*

3.3 Autres résultats

Les droites et plans discrets sont des objets fondamentaux d'étude pour la géométrie arithmétique mais ce ne sont pas les seuls. Beaucoup d'autres résultats intéressants ont été présentés ces dernières années tel qu'un algorithme de polygonalisation de courbes discrètes, étendu par la suite à la facettisation de surfaces[DEB95], des rotations discrètes[AND96]. Et ce ne sont là que quelques exemples, tant ce domaine de recherche n'en est qu'à ses débuts et promet des avancées intéressantes dans les années à venir.

4 Bibliographie

[AND96]: Eric Andrès, *The Quasi-Shear Rotation*, Discrete Geometry for Computer Imagery,S. Miguet, A. Montanvert, S. Ubeda,Springer-Verlag,1996,307-?

3 Il existe au moins un chemin 6-connexe qui traverse le plan sans l'intersecter

[BRE65]: J.E. Bresenham, *Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter*, IBM Computer Journal,1965,25-30

[DEB95]: Isabelle Debled-Rennesson, Etude et reconnaissance des droites et plans discrets, Université Louis Pasteur,1995

[REV91]: Reveillès, Jean-Pierre, Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique, Université Louis Pasteur, Strasbourg,1991

5 Autres références

Articles de géométrie discrète à l'EPFL: http://diwww.epfl.ch/w3lsp/publications/discretegeo/